

Aerodynamik des Fluges

VON

PROF. HARRY SCHMIDT

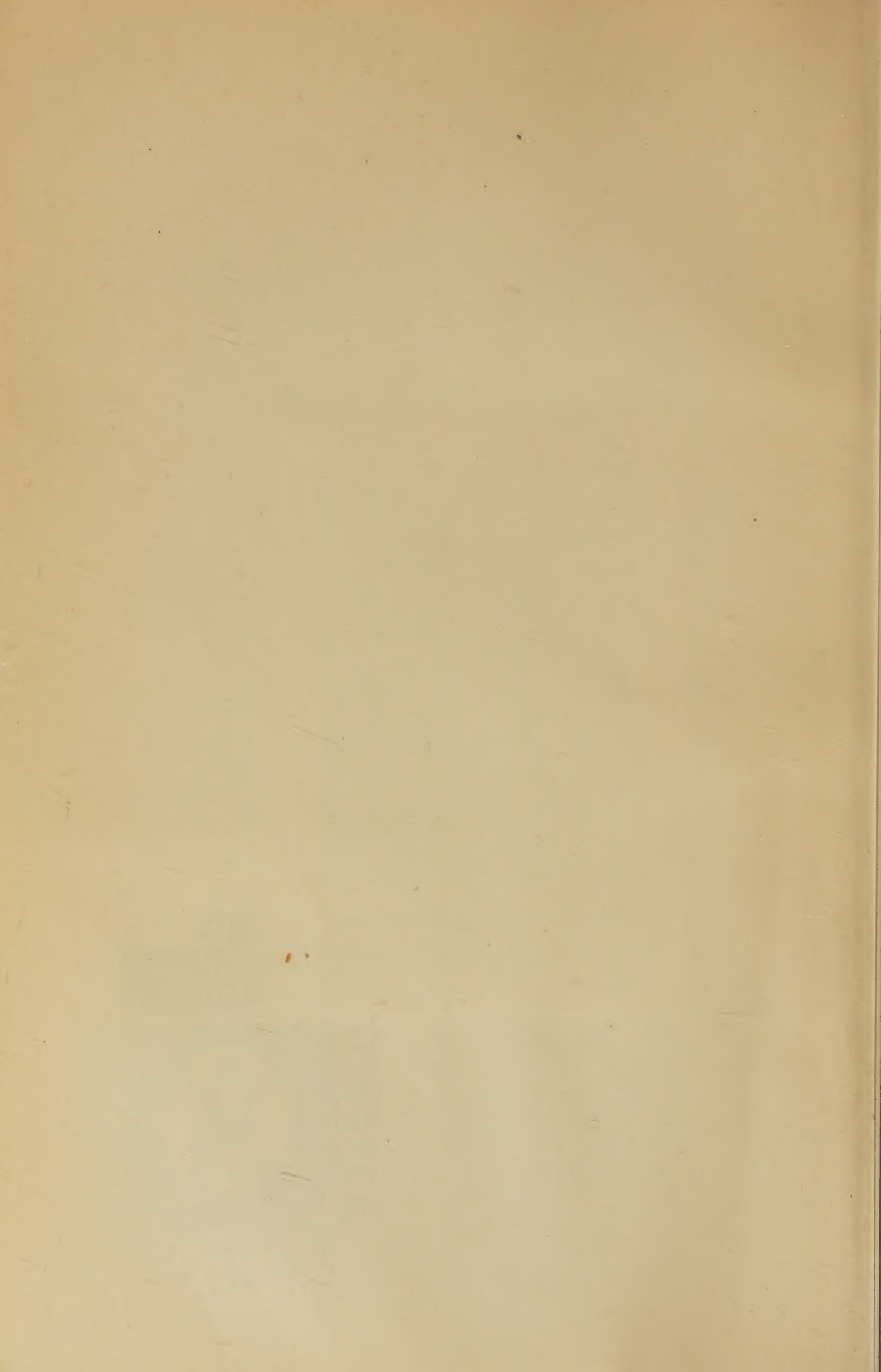


ZUR
BESPRECHUNG
ÜBERREICHT





Theodore von Karman



Aerodynamik des Fluges

Eine Einführung
in die mathematische Tragflächentheorie

Von

Harry Schmidt

Professor an der Gewerbehochschule Köthen
Privatdozent an der Universität Leipzig

Mit 81 Figuren



Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung
J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg
Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1929

Alle Rechte, insbesondere das der Über-
setzung in fremde Sprachen, vorbehalten

Vorwort.

Nicht ein durch besonders elegante und knappe Darstellung sich auszeichnendes Kompendium für Fachleute, sondern ein sowohl für Studierende als auch bereits in der Praxis stehende Ingenieure brauchbares, in die mathematische Theorie des Fluges möglichst klar und exakt einführendes Lehrbuch schwebte mir als Ziel bei der Niederschrift der nachstehenden Zeilen vor. Hydrodynamische Kenntnisse wurden daher nicht vorausgesetzt, und auch in mathematischer Hinsicht suchte ich mit einem Minimum von Hilfsmitteln auszukommen. Sichere Beherrschung der grundlegenden Begriffsbildungen der reellen Analysis sowie eine gewisse Vertrautheit mit der Theorie der Funktionen komplexen Arguments mußte allerdings vom Leser verlangt werden, falls auf nicht allzu umfangreichem Raum eine einigermaßen abgerundete Darstellung unseres Gegenstandes Platz finden sollte. Bei der Auswahl des Stoffes — denn von Vollständigkeit in irgendwelcher Richtung konnte keine Rede sein — habe ich mich von dem Gesichtspunkt leiten lassen, möglichst das zu bringen, was für das Verständnis der einschlägigen Fachliteratur als hinreichend anzusehen ist. Verhältnismäßig ausführlich aber glaubte ich auf die Theorie der unendlich breiten Tragfläche eingehen zu dürfen, da hierbei die Methoden der konformen Abbildung zu ausgiebiger Verwendung gelangen, deren Kenntnis dem Leser auch in anderer Hinsicht von Nutzen sein kann.

Für die Fertigstellung der Figurenvorlagen bin ich den Herren Ingenieuren Waldemar Kleinschmidt und Karl Schaaff, ferner für tatkräftige Hilfe bei der Durchsicht der Korrekturen Herrn Dr. Aloys Herrmann, Fräulein stud. math. Käte Schmidt sowie Herrn Dr. Erhard Tornier zu großem Dank verpflichtet, den auch an dieser Stelle noch einmal zum Ausdruck zu bringen ich nicht versäumen möchte.

Köthen, im Juli 1929.

Harry Schmidt.

Inhaltsverzeichnis.

Vorwort	III
Vorbemerkungen	VII
Einleitung	1

Erstes Kapitel. Die Grundgleichungen der Hydrodynamik.

§ 1. Die ideale Flüssigkeit	5
§ 2. Die neun Spannungskomponenten eines Kontinuums	7
§ 3. Der Begriff des Flüssigkeitsdrucks	12
§ 4. Stromlinien, Quellen und Senken	14
§ 5. Der Begriff des Flusses, die Kontinuitätsgleichung und der Begriff der Zirkulation	16
§ 6. Lokale und substantielle Betrachtungsweise	19
§ 7. Die Eulerschen Bewegungsgleichungen	21
§ 8. Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen und die Webersche Transformation	26
§ 9. Die allgemeinste Bewegung eines Flüssigkeitsteilchens	30

Zweites Kapitel. Wirbelfreie Flüssigkeitsbewegungen.

§ 10. Das Geschwindigkeitspotential einer wirbelfreien Flüssigkeitsbewegung	35
§ 11. Eindeutigkeit und Mehrdeutigkeit des Geschwindigkeitspotentials	38
§ 12. Die Bewegungsgleichungen einer stationären Potentialströmung	43
§ 13. Ein aerodynamisches Randwertproblem	46
§ 14. Die Strömung um einen Kugelkörper	50
§ 15. Das d'Alembertsche Paradoxon	54
§ 16. Die unendlich breite Tragfläche und der Begriff der zweidimensionalen Flüssigkeitsbewegung	57
§ 17. Ebene Potentialströmungen	60
§ 18. Ein ebenes aerodynamisches Randwertproblem	64

Drittes Kapitel. Funktionentheoretische Hilfsmittel.

§ 19. Allgemeine Eigenschaften analytischer Funktionen komplexen Arguments	70
§ 20. Konforme Abbildung	72
§ 21. Übertragung analytischer Funktionen in nicht-beschränkte Regularitätsgebiete	79
§ 22. Integralsätze in nicht-beschränkten Regularitätsgebieten	83
§ 23. Ein funktionentheoretisches Randwertproblem	88
§ 24. Einige Abbildungssätze	95
§ 25. Zur Berechnung der Abbildungsfunktion bei der konformen Abbildung beschränkter Gebiete auf eine Kreisfläche	99
§ 26. Der Faber-Bieberbachsche Flächensatz	106

Viertes Kapitel. Allgemeine Theorie des Auftriebs unendlich breiter Tragflächen.

Seite

§ 27. Das komplexe Geschwindigkeitspotential einer ebenen Potentialströmung	111
§ 28. Funktionentheoretische Formulierung eines ebenen aerodynamischen Randwertproblems	113
§ 29. Das komplexe Geschwindigkeitspotential der Strömung um eine Kreiskontur	118
§ 30. Allgemeine Eigenschaften der Strömung um eine Kreiskontur...	121
§ 31. Das komplexe Geschwindigkeitspotential der Strömung um eine beliebige Kontur	125
§ 32. Die Festlegung der Zirkulationskonstanten	129
§ 33. Die Blasius'schen Formeln	132
§ 34. Der Kutta-Joukowskische Satz	134
§ 35. Das statische Moment des Auftriebs und die Lage des Druckpunkts	136
§ 36. Die Achsen und der Brennpunkt eines Profils	138
§ 37. Der Profilmittelpunkt als konformer Schwerpunkt der Profilkontur	140
§ 38. Allgemeine Theorie der Profilparameter	147

Fünftes Kapitel. Spezielle Ausführungen zur Theorie der unendlich breiten Tragfläche.

§ 39. Vorbemerkungen	153
§ 40. Streckenprofile	154
§ 41. Kreisbogenprofile	156
§ 42. Joukowskische Profile	161
§ 43. Sichelflächenprofile	167
§ 44. v. Kármán-Trefftzsche Profile	176
§ 45. Das v. Misessche Profilerzeugungsverfahren	178
§ 46. Ermittlung der Auftriebseigenschaften vorgegebener Profile	185

Sechstes Kapitel. Wirbelbewegungen.

§ 47. Wirbellinien, Wirbelröhren und Wirbelfäden	192
§ 48. Zirkulationsstärke und Intensität eines Wirbelfadens	194
§ 49. Das Geschwindigkeitsfeld vorgegebener Wirbelsysteme	198
§ 50. Das Geschwindigkeitsfeld eines einzelnen Wirbelfadens	204
§ 51. Wirbelschichten	210
§ 52. Geradlinige Wirbelfäden	214

Siebentes Kapitel. Die Prandtl'sche Tragflügeltheorie.

§ 53. Das Wirbelband einer Tragfläche von endlicher Spannweite....	221
§ 54. Das Geschwindigkeitsfeld des Wirbelbandes	224
§ 55. Der induzierte Widerstand	233
§ 56. Die beiden Hauptaufgaben der Tragflügeltheorie	236
§ 57. Die elliptische Zirkulationsverteilung	238
§ 58. Tragflächen kleinsten Widerstandes	241
§ 59. Der rechteckige Tragflügel	247
§ 60. Schlußbemerkungen	250
Literaturhinweise	255
Register	256

Vorbemerkungen.

Als räumliches *Bezugssystem* legen wir unseren Betrachtungen ein rechtwinkliges Rechtssystem zugrunde, d. h. ein solches Achsenkreuz, bei dem diejenige Drehung um einen rechten Winkel, die die positive Richtung der X -Achse in die positive Richtung der Y -Achse überführt, durch Kombination mit einer Translation in der positiven Richtung der Z -Achse die Bewegung einer Rechtsschraube liefert.

Unter dem von zwei gerichteten Geraden (bezw. Vektoren) eingeschlossenen Winkel verstehen wir stets den der Bedingung $0 \leq \theta \leq \pi$ genügenden Winkel θ . Ferner wird — im Einklang mit der hinsichtlich des räumlichen Bezugssystems getroffenen Vereinbarung — die *positive Normalenrichtung* der von zwei gerichteten Geraden (bezw. Vektoren) aufgespannten Ebene durch die Vorschrift eindeutig festgelegt, daß eine in dieser Richtung erfolgende Translation die Bewegung einer Rechtsschraube liefern soll, falls sie mit derjenigen Drehung kombiniert wird, durch die die positive Richtung der an erster Stelle genannten Geraden auf kürzestem Wege in die positive Richtung der an zweiter Stelle genannten Geraden übergeführt wird.

Die Bezeichnungen *Kreis* und *Kugel* benutzen wir ausschließlich für die Kreis- und die Kugelfläche. Das von einem Kreis berandete Flächenstück nennen wir eine *Kreisfläche*, das von einer Kugel berandete Raumgebiet einen *Kugelkörper*.

Eine geschlossene oder nicht geschlossene Fläche heißt *beschränkt*, falls sich eine positive Konstante R derart angeben läßt, daß die Fläche ganz im Innern desjenigen Kugelkörpers gelegen ist, der von der mit dem Radius R um den Koordinatenanfangspunkt als Mittelpunkt geschlagenen Kugel berandet wird. In entsprechender Weise wird eine ebene Kurve *beschränkt* genannt, falls sich eine um den Ursprung des ebenen Bezugssystems als Mittelpunkt gelegte Kreisfläche derart bestimmen läßt, daß die betreffende Kurve ganz im Innern dieser Kreisfläche verläuft.

Unter einer *Umgebung* eines Punktes P im Raum (bezw. in einer Ebene) sind die Punkte eines um P als Mittelpunkt gelegten Kugelkörpers (bezw. einer um P als Mittelpunkt gelegten Kreisfläche) zu verstehen.

Sei S eine beschränkte geschlossene, sich nirgends berührende oder durchsetzende Fläche, die eine stetig sich drehende Tangentialebene bezw. Normale sowie eine stetige Krümmung besitzt, oder die sich aus einer endlichen Anzahl von solchen Flächenstücken zusammensetzt, deren jedes die eben genannten Eigenschaften aufweist.¹⁾ Dann wird durch S einerseits ein beschränktes, andererseits ein nicht-beschränktes, sich ins Unendliche erstreckendes Raumgebiet berandet; das erstere wollen wir schlechthin als das von S berandete Raumgebiet T (zuweilen auch der Deutlichkeit halber als das *Innengebiet* T von S), das zweite dagegen als das von S berandete Außengebiet T' (oder auch kürzer als das Außengebiet T' von S) bezeichnen. Die Berandung S wollen wir dabei als weder zu T noch zu T' gehörig ansehen; jeder Punkt eines Raumgebiets soll demnach stets ein innerer, d. h. ein solcher Punkt sein, für den sich eine hinreichend kleine, noch ganz dem betreffenden Gebiet angehörende Umgebung angeben läßt.

Sei ferner C eine beschränkte geschlossene, sich nirgends berührende oder durchsetzende, der XY -Ebene angehörende Kurve, die eine stetig sich drehende Tangente bezw. Normale sowie eine stetige Krümmung besitzt, oder die sich aus einer endlichen Anzahl von Kurvenstücken zusammensetzt, deren jedes die eben genannten Eigenschaften aufweist.²⁾ Dann wird durch C einerseits ein beschränktes, andererseits ein nicht-beschränktes, sich ins Unendliche erstreckendes Gebiet der XY -Ebene berandet; das erstere wollen wir schlechthin als das von C berandete ebene Gebiet B (zuweilen auch der Deutlichkeit halber als das *Innengebiet* B von C), das zweite dagegen als das von C berandete ebene Außengebiet B' (oder auch kurz als das Außengebiet B' von C) bezeichnen. Wiederum soll die Randkurve C weder dem Innengebiet B nach dem Außengebiet B' zugerechnet werden, so daß auch jedes ebene Gebiet lediglich innere Punkte enthält.

Ist F ein von einer geschlossenen Raumkurve L berandetes Flächenstück, so soll die *positive Umlaufrichtung* längs L durch Kombination mit einer Translation in der *positiven Normalenrichtung* auf F die Bewegung einer Rechtsschraube liefern. Liegt insbesondere eine geschlossene Kurve C der XY -Ebene vor, so bleibt bei der positiven Umlaufrichtung längs C das von C berandete Innengebiet stets zur Linken.

Die *positive Normalenrichtung* auf einer geschlossenen Fläche S soll stets in das Innere des von S berandeten Innengebiets, desgleichen die *positive Normalenrichtung* auf einer ebenen geschlossenen Kurve C stets in das Innere des von C berandeten Innengebiets B weisen.

Die *positive Integrationsrichtung* bei Kurvenintegralen längs beliebiger geschlossener Kurven stimmt stets mit der positiven Umlaufrichtung längs der betr. Kurve überein.

¹⁾ An diesen Voraussetzungen soll für sämtliche von uns zu benutzenden Flächen festgehalten werden.

²⁾ Auch hier wieder setzen wir diese Bedingungen als für jede von uns zu benutzende Kurve erfüllt voraus.



Einleitung.

Die Tatsache, daß ein Flugzeug die Luft in erheblicher Höhe über dem Erdboden in geradlinig-gleichförmiger Horizontalbewegung zu durchfliegen vermag, muß offenbar zunächst recht merkwürdig erscheinen. Denn wenn erfahrungsgemäß durch den rotierenden Propeller beständig ein Vortrieb auf das Flugzeug übertragen wird, und wenn man bedenkt, daß überdies Trägheit und Schwere wirksam sind, so sieht man sehr leicht ein, daß die wirklich beobachtete Flugbewegung keinesfalls durch den alleinigen Einfluß der genannten drei Faktoren bedingt sein kann. Man wird somit vermuten müssen, daß hier noch weitere Kräfte im Spiele sind, die einerseits den abwärts gerichteten Zug der Schwere, andererseits die beschleunigende Wirkung des Propellertriebs zu kompensieren und damit eine gleichförmige Horizontalbewegung herbeizuführen vermögen.

Um nun die Frage nach Ursprung und Größe jener zusätzlichen Kräfte beantworten zu können, müssen wir die Vorgänge in der Luft betrachten, die durch die Bewegung des Flugzeugs ausgelöst werden. Es liegt ja auf der Hand, daß ein die Luft durchfliegender Körper die von ihm passierten Luftschichten in Bewegung bringt, daß *Luftströmungen* hervorgerufen werden, die ihrerseits nicht ohne Einfluß auf das Flugzeug bleiben können. In der Tat bilden diese Strömungen die Ursache von *Luftkräften*, die am Flugzeug angreifen, und deren Resultierende man in zwei zueinander senkrechte Komponenten zu zerlegen pflegt, deren eine in die zur Flugbewegung genau entgegengesetzte Richtung fällt und als *Widerstand* bezeichnet wird, während man die dazu senkrechte Komponente *Auftrieb* nennt. *In den Luftbewegungen haben wir also die Ursache für die Möglichkeit des Fliegens zu erblicken, und einer wissenschaftlichen Behandlung des Flugproblems entsteht somit die Aufgabe, das Zustandekommen des Auftriebs und des Widerstands durch diejenigen Strömungsvorgänge zu deuten, die mit der Fortbewegung des Flugzeugs durch die Luft verbunden sind.*

Das Studium von Bewegungen materieller Systeme bildet den Gegenstand der Mechanik. Das älteste Gebiet der Mechanik ist die Statik, die sich mit der Untersuchung von Gleichgewichtszuständen befaßt. Da sich Zustände stets durch feste Größen beschreiben lassen, so laufen statische Probleme letzten Endes auf die Aufgabe hinaus, unbekannte feste Größen als Lösungen gewisser Gleichungssysteme zu ermitteln. Dem Übergang

von der Statik zur Dynamik entspricht sodann der Übergang von der Betrachtung von Zuständen zu der Betrachtung von Vorgängen. Zur Beschreibung von Vorgängen aber sind variable Größen erforderlich, und da zwischen den verschiedenen in Betracht gezogenen Veränderlichen gewisse gesetzmäßige Beziehungen — die allgemeinen Bewegungsprinzipie — postuliert werden, so reduziert sich die Dynamik in mathematischer Hinsicht auf die Untersuchung bestimmter Klassen von Funktionalgleichungen, die im allgemeinen die Form von Differentialgleichungen besitzen.

Will man physikalische Bewegungsvorgänge einer theoretischen Behandlung zugänglich machen, so muß man die in der Natur von uns angetroffenen Körper durch begriffliche Konstruktionen ersetzen, die ihren physischen Gegenständen in jeder als wesentlich angesehenen Beziehung entsprechen. Die einfachsten Beispiele solcher Idealisierungen bieten die Begriffe des materiellen Punkts und des starren Körpers. Da die hierbei als Bestimmungsstücke auftretenden Variablen, wie z. B. Koordinaten und Geschwindigkeiten, lediglich von der Zeit abhängig sind, mithin Funktionen von nur einer Veränderlichen darstellen, so kann man in der Dynamik starrer Systeme prinzipiell mit gewöhnlichen Differentialgleichungen auskommen. Die Forderung absoluter Starrheit aber läßt sich nur für eine beschränkte Klasse natürlicher Körper und selbst für diese nur unter ziemlich engen Voraussetzungen rechtfertigen, und so sieht sich die Dynamik genötigt, der Existenz *deformierbarer Körper* Rechnung zu tragen. Obwohl wir nun heute mit Sicherheit zu wissen glauben, daß aller Materie eine atomistische Struktur zuzuschreiben ist, schafft sich die Mechanik als Idealbild eines deformierbaren Körpers den Begriff der *kontinuierlich verbreiteten Masse*, d. h. eines materiellen Systems, das das von ihm erfüllte Raumgebiet lückenlos durchsetzt. Infolgedessen sind die in der Dynamik deformierbarer Systeme auftretenden Variablen sowohl von der Zeit als auch von drei Raumkoordinaten abhängig; sie stellen somit Funktionen mehrerer Veränderlicher dar, und dieser Umstand bedingt bezüglich der die Bewegungsgesetze zum Ausdruck bringenden Funktionalgleichungen, daß diese die Form von Systemen partieller Differentialgleichungen annehmen müssen.

Die Gesamtheit der deformierbaren Körper tritt uns nun entweder im festen, flüssigen oder gasförmigen Aggregatzustand entgegen. Dementsprechend gliedert sich die Mechanik der Kontinua in drei Gebiete, nämlich erstens die *Elastizitätstheorie* als Mechanik des festen Kontinuums, zweitens die *Hydrodynamik* als Mechanik des flüssigen Kontinuums und drittens die *Aerodynamik* als Mechanik des gasförmigen Kontinuums. Selbstverständlich bedeutet diese Einteilung keine strenge Scheidung in drei voneinander völlig getrennte mechanische Disziplinen — als gemeinsames Band umschließt sie der Begriff des Kontinuums und die daraus entspringende Eigenart ihrer mathematischen Behandlung zu einem einheitlichen Ganzen, dem ein breites theoretisches Fundament zugrunde liegt,

aus dem heraus sich dann die einzelnen Teilgebiete nach den verschiedenen Richtungen spezieller Anforderungen absondern. So sind die festen Körper dadurch gekennzeichnet, daß sie unter der Einwirkung endlicher äußerer Kräfte im allgemeinen nur kleine Änderungen von Form und Volumen erfahren, während die Flüssigkeiten und Gase dem Versuch einer Formänderung nur sehr geringen Widerstand entgegensetzen. Was Flüssigkeiten und Gase voneinander trennt, ist ihr verschiedenes Verhalten gegenüber Versuchen, eine Änderung des Volumens herbeizuführen. Um diese Tatsache schärfer charakterisieren zu können, bedienen wir uns des Begriffs der Dichte eines Kontinuums, zu dessen Definition wir auf die folgende Weise gelangen. Sei

$$T_1, T_2, T_3, \dots, T_\nu, \dots$$

eine Folge beschränkter Raumgebiete, die sich auf einen festen Punkt P des Kontinuums zusammenzieht, d. h. deren sämtliche Glieder T_ν den Punkt P als inneren Punkt enthalten, und für die, unter τ_ν das Volumen von T_ν verstanden, die Relation

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \tau_\nu = 0$$

besteht. Jedem T_ν dieser Folge ist eine Masse m_ν (nämlich die Masse der in T_ν eingeschlossenen Materiemenge) zugeordnet, die als Funktion des Volumens τ_ν von T_ν aufgefaßt, mithin in der Form $m_\nu = m(\tau_\nu)$ geschrieben werden kann. Als dann wird gefordert, daß die Folge

$$\frac{m(\tau_1)}{\tau_1}, \frac{m(\tau_2)}{\tau_2}, \frac{m(\tau_3)}{\tau_3}, \dots, \frac{m(\tau_\nu)}{\tau_\nu}, \dots$$

mit unbegrenzt wachsendem Index ν einem Grenzwert ϱ zustrebt, der als die *Dichte* des Kontinuums an der Stelle P bezeichnet wird. Es ist demnach

$$\varrho = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{m(\tau_\nu)}{\tau_\nu}$$

oder

$$\varrho = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{m(\tau)}{\tau} = \frac{dm}{d\tau}$$

zu setzen. Selbstverständlich wird die Größe ϱ zunächst von der Wahl des Punktes P abhängig sein, d. h. also eine Funktion des Ortes darstellen¹⁾. Überdies aber wechselt der Wert der Dichte, wenn das Gesamtvolumen des Kontinuums durch äußere Kräfte geändert wird. Jeder Volumenänderung geht also stets eine Änderung der Dichte parallel, und so läßt sich die Erfahrungstatsache, daß die Flüssigkeiten nur schwer, die Gase dagegen

¹⁾ Auch von der Temperatur ist die Dichte eines Kontinuums abhängig, doch soll hier ein für allemal die Voraussetzung getroffen werden, daß wir bei unseren Betrachtungen die Temperatur stets als konstant ansehen wollen.

verhältnismäßig leicht ihr Volumen zu ändern vermögen, auch dahin zum Ausdruck bringen, daß die Druckabhängigkeit der Dichte bei den Flüssigkeiten nur sehr geringfügig, bei den Gasen aber ziemlich erheblich ist. Man bezeichnet daher die Flüssigkeiten als wenig, die Gase hingegen als stark *kompressible* Kontinua. Beschränkt man sich aber auf solche Vorgänge, bei denen keine großen Druckunterschiede auftreten können, so sind Flüssigkeiten und Gase in mechanischer Hinsicht einander durchaus ähnlich. Alsdann empfiehlt sich's also, von einer Unterscheidung abzusehen — ein Umstand, dem man dadurch Rechnung trägt, daß man beide als *Flüssigkeiten im weiteren Sinn* bezeichnet. Die Flüssigkeiten zerfallen somit einerseits in die *eigentlichen Flüssigkeiten* oder die *tropfbar flüssigen* Stoffe, andererseits in die *Gase* oder die *gasförmig flüssigen* Stoffe. Die Aerodynamik wird unter der genannten Voraussetzung zur Hydrodynamik, und da diese Voraussetzung, wie wir später¹⁾ sehen werden, für die uns hier speziell interessierenden Luftströmungen tatsächlich zutrifft, so werden wir mit gleichem Recht von einer *Aerodynamik* oder aber einer *Hydrodynamik des Fluges* reden können. Die letztere Ausdrucksweise bietet den Vorteil größerer Anschaulichkeit, weshalb wir uns ihrer im folgenden fast ständig bedienen werden.

¹⁾ Vgl. § 12, S. 45.

Erstes Kapitel.

Die Grundgleichungen der Hydrodynamik.

§ 1. Die ideale Flüssigkeit.

Die bereits in der Einleitung vollzogene Idealisierung einer Flüssigkeit zum Kontinuum wollen wir jetzt durch eine Reihe von weiteren Festsetzungen ergänzen, deren Gesamtheit dann den unseren Untersuchungen zugrunde zu legenden Begriff der *idealen Flüssigkeit* definieren wird.

Zunächst einmal darf unbedenklich die äußerst geringfügige Druckabhängigkeit der Dichte vernachlässigt, mithin die Flüssigkeit als völlig unzusammendrückbar oder *inkompressibel* vorausgesetzt werden. Ferner wollen wir weder irgendwelche Inhomogenitäten noch die Existenz physikalisch irgendwie bevorzugter Richtungen zulassen, so daß also unsere Flüssigkeit ein *homogenes* und *isotropes* Kontinuum darstellen soll. Insbesondere entspricht es der homogenen Beschaffenheit, daß die Dichte der Flüssigkeit als vom Ort unabhängig und damit wegen der soeben postulierten Druckunabhängigkeit als eine ein für allemal festliegende Konstante anzusehen ist.

Zu einer wesentlich wichtigeren Eigenschaft der idealen Flüssigkeit gelangen wir auf Grund der folgenden Überlegung. Wenn sich eine Flüssigkeitsmenge unter dem Einfluß gewisser äußerer Kräfte im Gleichgewicht befindet, so müßte dieses Gleichgewicht natürlich sofort eine Störung erleiden, falls ein im Inneren befindlicher Teil der Flüssigkeit plötzlich entfernt würde. Denn dann würde ja die umgebende Flüssigkeit in das leer gewordene Raumgebiet einzudringen drohen, und wenn man nach wie vor das Gleichgewicht aufrecht erhalten wollte, so hätte man bestimmte Zusatzkräfte anzubringen, die offenbar in sämtlichen Punkten derjenigen geschlossenen Fläche angreifen müßten, durch die der herausgenommene Teil gegen die übrige Flüssigkeitsmasse abgegrenzt wurde. Da nun aber auch durch Wiedereinführung der entfernten Flüssigkeit das Gleichgewicht sich wieder herstellen läßt, so sind wir somit zu der sehr bedeutsamen Einsicht gelangt, daß jeder beliebige Teil einer Flüssigkeit auf seine Umgebung gewisse Kräfte ausübt, die durch die Punkte seiner Berandung übertragen werden, und die man daher als *Flächenkräfte* bezeichnet. Fassen wir also irgendeinen Punkt P in einem flüssigkeitsgefüllten Raumgebiet ins Auge, und legen durch ihn ein der Einfachheit halber zunächst als eben vorausgesetztes, in beliebiger Richtung ganz im Inneren der Flüssigkeit ver-

laufendes Flächenstück F hindurch, so wird durch dasselbe eine gewisse Kraft $\mathfrak{P}$ übertragen, deren Richtung gegen das Flächenstück F um einen bestimmten Winkel geneigt ist. Besonders einfach gestalten sich dabei die Verhältnisse, wenn, unter ω den Flächeninhalt von F verstanden, der Quotient¹⁾

$$\frac{\mathfrak{P}}{\omega} = \mathfrak{E} \quad (1,1)$$

von der Größe von ω vollkommen unabhängig ist. Denn dann stellt die vektorielle Konstante $\mathfrak{E}$ die in Bezug auf das gewählte Flächenstück F pro Flächeneinheit wirksame Kraft dar, und die Gesamtkraft $\mathfrak{P}$ wird einfach durch Multiplikation von $\mathfrak{E}$ mit ω gefunden:

$$\mathfrak{P} = \omega \cdot \mathfrak{E}. \quad (1,11)$$

Im allgemeinen aber wird die durch (1,1) definierte Größe $\mathfrak{E}$ keine Konstante, sondern eine Funktion von ω sein, womit dann die Gleichung (1,11) ihre Bedeutung einbüßt. Wir führen nun die durchaus wesentliche Voraussetzung ein, daß man bei hinreichend kleinen Flächenstückchen, die wir fortan als Flächenelemente bezeichnen werden, den Betrag der Flächenkraft dem Inhalt ihrer Angriffsfläche proportional setzen kann, daß also mit anderen Worten der Quotient „Flächenkraft durch Flächeninhalt“ mit unbegrenzt abnehmendem Flächeninhalt einem festen, lediglich von dem Ort und der Orientierung des betr. Flächenelements abhängigen Grenzwert zustrebt. Oder genauer gesagt: Ist P ein auf dem beliebig geformten Flächenstück F vom Inhalt ω gelegener Punkt, und bedeutet $\mathfrak{P}$

die durch F übertragene Flächenkraft, so soll sich der Quotient $\frac{\mathfrak{P}}{\omega}$ einem Grenzwert nähern, falls F auf den Punkt P zusammengezogen wird. An die Stelle von (1,1) tritt demnach jetzt die Forderung, daß für jeden Punkt P

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\mathfrak{P}}{\omega} = \frac{d\mathfrak{P}}{d\omega} = \mathfrak{E} \quad (1,2)$$

existieren soll. Die hiermit als Funktion der Koordinaten von P sowie der Orientierung des den Punkt P enthaltenden Flächenelements definierte Vektorgröße $\mathfrak{E}$ heißt die *Spannung in P in Bezug auf das betreffende Flächenelement*. Mit (1,2) gleichbedeutend ist sodann die Aussage, daß die gesamte, durch ein beliebiges Flächenstück F übertragene Flächenkraft $\mathfrak{P}$ durch das über das ganze Flächenstück F zu erstreckende Flächenintegral von $\mathfrak{E}$ gegeben, also anstelle von (1,11)

$$\mathfrak{P} = \int_F \mathfrak{E} d\omega \quad (1,21)$$

zu setzen ist.

¹⁾ Zur Numerierung der Formeln benutzen wir Dezimalbrüche. Dabei gibt die ganze Zahl links vom Komma die Nummer des Paragraphen an, während die rechts vom Komma stehende Ziffernfolge die einzelnen Formeln desselben Paragraphen voneinander unterscheidet.

Den vorstehenden Ausführungen gemäß haben wir die Spannungen als Ursache des Widerstands anzusehen, den ein Kontinuum jedem Versuch einer Formänderung entgegensetzt. Nun leisten die Flüssigkeiten erfahrungsgemäß nur einen sehr geringen Widerstand, wenn man ihre einzelnen Schichten aneinander vorbeigleiten läßt; sie unterscheiden sich in dieser Hinsicht wesentlich von den festen Kontinuen, bei denen die sogenannte Gleitreibung ja sehr erheblich ist. Bei den Flüssigkeiten sind demnach die in tangentialer Richtung wirksamen Spannungen sehr klein, und so liegt der Gedanke nahe, bei theoretischen Untersuchungen zunächst von ihnen völlig abzusehen. Man spricht dann von einer *reibungslosen* Flüssigkeit, und indem wir diese Vereinfachung vornehmen, können wir zusammenfassend sagen, daß wir als *Idealbild einer Flüssigkeit ein homogenes und isotropes Kontinuum wählen wollen, das inkompressibel und reibungslos ist.*

§ 2. Die neun Spannungskomponenten eines Kontinuums.

Jede Spannungsangabe bezieht sich, wie den Ausführungen des vorhergehenden Paragraphen zu entnehmen ist, auf ein ganz bestimmtes Flächenelement. Infolgedessen ist uns der Spannungszustand eines Kontinuums erst dann vollständig gegeben, wenn wir die Spannung in jedem einzelnen Punkt des Kontinuums in Bezug auf jedes einzelne durch diesen Punkt hindurchgehende Flächenelement kennen. Betrachten wir nun ein beliebiges, den Punkt P des Kontinuums enthaltendes Flächenelement, dessen Orientierung durch die positive Richtung seiner Normalen gekennzeichnet sei. Die Richtung der in P in Bezug auf dieses Flächenelement wirksamen Spannung wird mit der positiven Normalenrichtung im allgemeinen einen gewissen Winkel einschließen; wir können dann die Spannung in zwei Komponenten zerlegen, deren eine in die Richtung der Normalen und deren andere in diejenige Ebene fällt, die das Flächenelement enthält. Jene erste Komponente wird als *Normalspannung*, die zweite als *Tangentialspannung* oder auch *Schubspannung* bezeichnet. Zur vollständigen Festlegung der Schubspannung ist natürlich neben ihrer Größe noch ihre Richtung anzugeben, weshalb man sie ihrerseits wieder in zwei Komponenten zerspalten wird, die auf zwei feste, in der Ebene des Flächenelements zueinander senkrecht liegende Achsen bezogen sind.

Jetzt denken wir uns durch einen im Inneren des Kontinuums befindlichen Punkt P mit den auf ein festes räumliches rechtwinkliges Achsensystem bezogenen Koordinaten x_0, y_0, z_0 vier beliebige Flächenelemente von verschiedener räumlicher Orientierung gelegt. Die Spannungen in P in Bezug auf diese Flächenelemente seien mit $\mathfrak{S}_1(x_0, y_0, z_0)$, $\mathfrak{S}_2(x_0, y_0, z_0)$, $\mathfrak{S}_3(x_0, y_0, z_0)$ und $\mathfrak{S}_4(x_0, y_0, z_0)$ bezeichnet. Dabei soll die Hinzufügung der Koordinaten von P daran erinnern, daß die Spannungen Ortsfunktionen sind, die wir stets als stetig voraussetzen wollen, während die verschiedenen

Indizes sich auf die einzelnen Flächenelemente beziehen und somit die Richtungsabhängigkeit der Spannungen zum Ausdruck bringen. Errichten wir nun in P auf jedem einzelnen der vier von uns gewählten Flächenelemente die Normale, tragen auf allen diesen Normalen von P aus eine beliebige Strecke ab, deren Länge wir mit h bezeichnen wollen, und legen alsdann durch die als Endpunkte jener Strecken auf den vier Normalen erhaltenen Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 je eine Ebene parallel zu dem zugehörigen Flächenelement, so entsteht ein den Punkt P umschließendes Tetraeder, dessen vier Seitenflächen wir mit F_1, F_2, F_3, F_4 bezeichnen (vgl. Fig. 1). Vergegenwärtigen wir uns jetzt, welche Kräfte auf den von

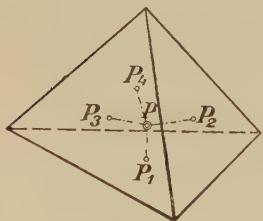


Fig. 1.

diesem Tetraeder abgegrenzten Teil des Kontinuums einwirken! Als solche Kräfte kommen offenbar einerseits gewisse äußere, an der vom Tetraeder umschlossenen Masse angreifende Kräfte, wie z. B. die Schwere, in Betracht; andererseits aber auch die Flächenkräfte, die durch die vier Seitenflächen des Tetraeders übertragen werden. Jene äußeren Kräfte werden im allgemeinen Funktionen des Orts sein, die hier ebenfalls als stetig vorausgesetzt werden sollen; wir können

diese Kräfte nach bekannten Gesetzen zu einer Resultierenden vereinigen, die wir auf die Masseneinheit beziehen und als vektorielle Ortsfunktion mit $\mathfrak{A}(x, y, z)$ bezeichnen. Es soll also mit anderen Worten $\mathfrak{A}(x, y, z)$ die an der durch die Koordinaten x, y, z gekennzeichneten Stelle auf eine dort konzentriert gedachte Masse vom Betrag eins einwirkende Kraft darstellen. Dann ist auf Grund der in der Einleitung angeführten Definition der Dichte die an dem vom Tetraeder begrenzten Materieteil angreifende Gesamtmassenkraft durch das über das ganze vom Tetraeder berandete Raumgebiet T zu erstreckende Raumintegral

$$\int_{(T)} \mathfrak{A}(x, y, z) \cdot \rho \, d\tau = \rho \cdot \int_{(T)} \mathfrak{A}(x, y, z) \, d\tau$$

gegeben, falls ρ die konstante Dichte unseres homogenen Kontinuums bedeutet. Die durch die Tetraederfläche F_ν ($\nu = 1, 2, 3$ oder 4) übertragene Flächenkraft dagegen wird gemäß (1, 21) durch das über F_ν zu erstreckende Flächenintegral

$$\int_{(F_\nu)} \mathfrak{S}_\nu(x, y, z) \, d\omega$$

geliefert, so daß die gesamte in Frage kommende Flächenkraft durch die geometrische Summe jener vier einzelnen Flächenkräfte, d. h. also durch den Ausdruck

$$\sum_{\nu=1}^4 \int_{(F_\nu)} \mathfrak{S}_\nu(x, y, z) \, d\omega,$$

bestimmt wird.

Nun befindet sich aber der von dem Tetraeder umschlossene Materieteil im Inneren des Kontinuums im Gleichgewichtszustand — eine Tatsache, aus der die Anwendung eines bekannten Prinzips der allgemeinen Mechanik eine überaus wichtige Schlußfolgerung zu ziehen gestattet. Nimmt nämlich ein beliebiges Punktsystem eine Gleichgewichtslage ein, so müssen die an dem starr gedachten System angreifenden äußeren Kräfte sich das Gleichgewicht halten; es muß demnach sowohl die resultierende Kraft als auch das resultierende Kräftepaar verschwinden. Beschränken wir uns hier auf den ersten Teil dieser Bedingung, bringen also lediglich das Verschwinden der auf den vom Tetraeder begrenzten Materieteil einwirkenden Gesamtkraft zum Ausdruck, so erhalten wir in der Vektorgleichung

$$\varrho \cdot \int_{(T)} \mathfrak{A}(x, y, z) d\tau + \sum_{\nu=1}^4 \int_{(F_\nu)} \mathfrak{S}_\nu(x, y, z) d\omega = 0 \quad (2,1)$$

eine Beziehung, die notwendigerweise für jedes beliebige T erfüllt sein muß, und die wir jetzt einer rein mathematischen Umformung unterwerfen wollen. Zunächst kann nach dem ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\int_{(T)} \mathfrak{A}(x, y, z) d\tau = \tau \cdot \mathfrak{A}(\xi, \eta, \zeta)$$

und

$$\int_{(F_\nu)} \mathfrak{S}_\nu(x, y, z) d\omega = \omega_\nu \cdot \mathfrak{S}_\nu(\xi_\nu, \eta_\nu, \zeta_\nu)$$

gesetzt werden, wobei $\mathfrak{A}(\xi, \eta, \zeta)$ den Wert der stetigen Funktion $\mathfrak{A}(x, y, z)$ an einer gewissen, dem vom Tetraeder berandeten Raumgebiet T angehörenden Stelle (ξ, η, ζ) , desgleichen $\mathfrak{S}_\nu(\xi_\nu, \eta_\nu, \zeta_\nu)$ den Wert der stetigen Funktion $\mathfrak{S}_\nu(x, y, z)$ an einer gewissen, auf F_ν gelegenen Stelle $(\xi_\nu, \eta_\nu, \zeta_\nu)$ sowie τ den Rauminhalt von T und ω_ν den Flächeninhalt von F_ν bedeutet. Setzen wir nun

$$\mathfrak{S}_\nu(\xi_\nu, \eta_\nu, \zeta_\nu) = \mathfrak{S}_\nu(x_0, y_0, z_0) + \mathfrak{s}_\nu,$$

so sind die $\mathfrak{s}_\nu$ Größen, die wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der vier Funktionen $\mathfrak{S}_\nu(x, y, z)$ mit unbegrenzt abnehmendem h gegen Null konvergieren, mithin den Gleichungen

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathfrak{s}_\nu = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, 4) \quad (2,2)$$

genügen. Die Gleichung (2, 1) geht somit in

$$\varrho \cdot \tau \cdot \mathfrak{A}(\xi, \eta, \zeta) + \sum_{\nu=1}^4 \{ \mathfrak{S}_\nu(x_0, y_0, z_0) + \mathfrak{s}_\nu \} \cdot \omega_\nu = 0 \quad (2,3)$$

über. Beachtet man, daß sich das Raumgebiet T in vier von Pyramiden begrenzte Raumgebiete mit der gemeinsamen Spitze P zerspalten läßt, die sämtlich dieselbe Höhe h haben, und deren Grundflächen von den vier

Seitenflächen F_ν des Tetraeders gebildet werden, so erhält man die Beziehung

$$\tau = \frac{h}{3} \cdot \sum_{\nu=1}^4 \omega_\nu.$$

Infolgedessen wird (2,3) zu

$$\frac{h \cdot \varrho}{3} \cdot \mathfrak{R}(\xi, \eta, \zeta) \cdot \sum_{\nu=1}^4 \omega_\nu + \sum_{\nu=1}^4 \mathfrak{S}_\nu(x_0, y_0, z_0) \cdot \omega_\nu + \sum_{\nu=1}^4 \mathfrak{S}_\nu \cdot \omega_\nu = 0,$$

woraus nach Division durch den als Summe positiver endlicher Größen sicher von Null verschiedenen Ausdruck $\sum_{\nu=1}^4 \omega_\nu$ die Bedingung

$$\frac{h \varrho}{3} \mathfrak{R}(\xi, \eta, \zeta) + \sum_{\nu=1}^4 \Omega_\nu \cdot \mathfrak{S}_\nu(x_0, y_0, z_0) + \sum_{\nu=1}^4 \Omega_\nu \cdot \mathfrak{S}_\nu = 0 \quad (2,4)$$

folgt, falls zur Abkürzung

$$\frac{\omega_\nu}{\sum_{\mu=1}^4 \omega_\mu} = \Omega_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3, 4) \quad (2,5)$$

gesetzt wird. Nun ist aber jedes ω_ν als Flächeninhalt eines Pyramidenparallelschnitts der zweiten Potenz von h proportional, d. h. wir können

$$\omega_\nu = h^2 \cdot \omega_\nu^* \quad (2,51)$$

setzen, wobei ω_ν^* den Wert von ω_ν für den Fall darstellt, daß als Größe von h die Längeneinheit gewählt wird. Sämtliche ω_ν^* sind demnach endliche Größen, und dasselbe gilt wegen

$$\Omega_\nu = \frac{\omega_\nu}{\sum_{\mu=1}^4 \omega_\mu} = \frac{h^2 \cdot \omega_\nu^*}{\sum_{\mu=1}^4 h^2 \omega_\mu^*} = \frac{\omega_\nu^*}{\sum_{\mu=1}^4 \omega_\mu^*} \quad (2,52)$$

auch für die von h völlig unabhängigen Ω_ν . Führt man daher jetzt in (2,4) den Grenzübergang $h \rightarrow 0$ aus, zieht also das von dem von uns betrachteten Tetraeder berandete Raumgebiet T auf den Punkt P zusammen, so bleibt wegen (2,2) als Gleichgewichtsbedingung

$$\sum_{\nu=1}^4 \Omega_\nu \cdot \mathfrak{S}_\nu(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad (2,6)$$

übrig. Diese Gleichung besagt aber, daß die vier im Punkte P wirksamen Spannungen $\mathfrak{S}_1(x_0, y_0, z_0)$, $\mathfrak{S}_2(x_0, y_0, z_0)$, $\mathfrak{S}_3(x_0, y_0, z_0)$ und $\mathfrak{S}_4(x_0, y_0, z_0)$ linear voneinander abhängig sind, mithin die vierte berechnet werden kann, sobald die drei übrigen gegeben sind.

Da nun die vier Flächenelemente, auf die sich die Spannungen im Punkt P beziehen, ebenso wie auch der Punkt P selbst, völlig willkürlich von uns ausgewählt wurden, so läßt sich das Resultat der soeben angestellten Überlegungen ganz allgemein dahin zum Ausdruck bringen, daß *der Spannungszustand in jedem einzelnen Punkt eines Kontinuums bereits dann vollständig, d. h. in Bezug auf jedes durch den betr. Punkt hindurchgehende Flächenelement, gegeben ist, wenn man lediglich die Spannungen in dem Punkt in Bezug auf drei voneinander verschiedene, im übrigen aber in ihrer räumlichen Orientierung willkürlich wählbare Flächenelemente kennt*. Insbesondere kann man demnach den Spannungszustand eines Kontinuums dadurch charakterisieren, daß man für jeden seiner Punkte die Spannungen in Bezug auf drei zueinander senkrechte Flächenelemente angibt, die zu den drei Ebenen eines im Raum festliegenden rechtwinkligen Koordinatensystems parallel sind. Jede einzelne dieser drei Spannungen wird dabei im allgemeinen gegen das zugehörige Flächenelement irgendwie geneigt sein. Man wird daher jede von ihnen in drei Komponenten zerlegen, die zu den drei Achsen des Koordinatensystems parallel sind, so daß sich dann also für jeden Punkt insgesamt neun *Spannungskomponenten* ergeben, die wir folgendermaßen bezeichnen wollen:

$$\left. \begin{array}{l} p_{xx}, p_{xy}, p_{xz}, \\ p_{yx}, p_{yy}, p_{yz}, \\ p_{zx}, p_{zy}, p_{zz}. \end{array} \right\} \quad (2,7)$$

Dabei soll p_{xx} die X -Komponente, p_{xy} die Y -Komponente und p_{xz} die Z -Komponente der Spannung in Bezug auf das zur X -Richtung senkrechte, also zu der YZ -Ebene des Koordinatensystems parallele Flächenelement bedeuten, und in entsprechender Weise sind die Bezeichnungen der sechs übrigen Komponenten zu verstehen (vgl. Fig. 2). Demnach stellen p_{xx} , p_{yy} und p_{zz} Normalspannungen dar, während die durch zwei voneinander verschiedene Indizes gekennzeichneten Komponenten Tangentialspannungen sind.

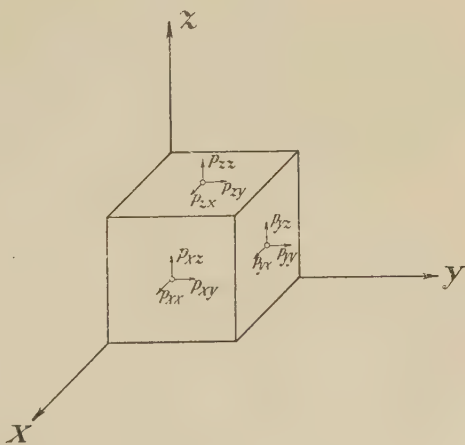


Fig. 2.

§ 3. Der Begriff des Flüssigkeitsdrucks.

Durch die neun Spannungskomponenten (2,7) ist, wie bereits hervorgehoben wurde, der Spannungszustand in jedem beliebigen Punkt P des Kontinuums vollständig bestimmt. Unter Benutzung von (2,6) wollen wir uns die Bedeutung dieser Tatsache noch einmal anschaulich klar zu machen suchen. Zu diesem Zweck zerfallen wir zunächst die Vektorgleichung (2,6) in die drei Komponentengleichungen

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\nu=1}^4 \Omega_{\nu} \cdot S_x^{(\nu)} &= 0, \\ \sum_{\nu=1}^4 \Omega_{\nu} \cdot S_y^{(\nu)} &= 0, \\ \sum_{\nu=1}^4 \Omega_{\nu} \cdot S_z^{(\nu)} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3,1)$$

wobei eben mit $S_x^{(\nu)}$, $S_y^{(\nu)}$ sowie $S_z^{(\nu)}$ die rechtwinkligen Komponenten des Vektors $\mathfrak{S}_{\nu}$ im Punkte P bezeichnet werden sollen. Als dann wählen wir auf Grund der zuvor getroffenen Verabredung die durch die drei Indizes $\nu = 1, 2, 3$ gekennzeichneten Flächenelemente derart, daß sie zu den drei durch das zugrundegelegte rechtwinklige Koordinatensystem bestimmten Ebenen parallel laufen; infolgedessen ist also

$$\left. \begin{aligned} S_x^{(1)} &= p_{xx}, \quad S_y^{(1)} = p_{xy}, \quad S_z^{(1)} = p_{xz}, \\ S_x^{(2)} &= p_{yx}, \quad S_y^{(2)} = p_{yy}, \quad S_z^{(2)} = p_{yz}, \\ S_x^{(3)} &= p_{zx}, \quad S_y^{(3)} = p_{zy}, \quad S_z^{(3)} = p_{zz} \end{aligned} \right\} \quad (3,11)$$

zu setzen. Die räumliche Lage des vierten, beliebig orientierten Flächenelements können wir wiederum durch Angabe der positiven Richtung seiner Normalen n kennzeichnen, die mit der X -, der Y - bzw. der Z -Achse die Winkel (n, x) , (n, y) bzw. (n, z) einschließen möge. Offenbar müssen diese drei Winkel sämtlich stumpfe Winkel sein. Denn die vier Flächenelemente haben wir ja als die Seitenflächen eines auf den Punkt P zusammengezogenen Tetraeders anzusehen, und die positive Normalenrichtung weist in das Innere des vom Tetraeder berandeten Innengebiets (vgl. Fig. 3, in der n' eine durch den Koordinatenanfangspunkt gezogene Parallele zu der Normalen n jener vierten

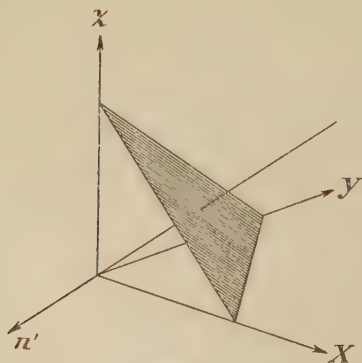


Fig. 3.

Seitenfläche des den Punkt P umschließenden Tetraeders bedeuten soll, und in der die räumliche Orientierung dieser vierten Fläche durch die

schräffiert eingezeichnete Fläche angedeutet ist). Beachten wir schließlich, daß unter den jetzt getroffenen Voraussetzungen für die in (2,51) eingeführten Größen ω_i^* die Beziehungen

$$\begin{aligned}\omega_1^* &= -\omega_4^* \cdot \cos(n, x), \\ \omega_2^* &= -\omega_4^* \cdot \cos(n, y), \\ \omega_3^* &= -\omega_4^* \cdot \cos(n, z)\end{aligned}$$

gelten¹⁾, so geht (3,1) unter Berücksichtigung von (2,52) und (3,11) nach einfacher Umformung in das Gleichungstriple

$$\left. \begin{aligned}S_x^{(4)} &= p_{xx} \cdot \cos(n, x) + p_{yx} \cdot \cos(n, y) + p_{zx} \cdot \cos(n, z), \\ S_y^{(4)} &= p_{xy} \cdot \cos(n, x) + p_{yy} \cdot \cos(n, y) + p_{zy} \cdot \cos(n, z), \\ S_z^{(4)} &= p_{xz} \cdot \cos(n, x) + p_{yz} \cdot \cos(n, y) + p_{zz} \cdot \cos(n, z)\end{aligned} \right\} \quad (3,2)$$

über. Diese Gleichungen gestatten, die rechtwinkligen Komponenten $S_x^{(4)}$, $S_y^{(4)}$ und $S_z^{(4)}$ der Spannung $\mathfrak{S}_4$ im Punkte P in Bezug auf jedes beliebige, durch die Richtungswinkel (n, x) , (n, y) und (n, z) seiner positiven Normalen charakterisierte Flächenelement aus den neun Spannungskomponenten in P mit Leichtigkeit zu berechnen. Sind uns also jene Spannungskomponenten als Funktionen der drei räumlichen Koordinaten x, y, z gegeben, so ist uns damit der Spannungszustand des gesamten Kontinuums vollständig bekannt.

Es ließe sich nun leicht der Nachweis erbringen, daß die in (2,7) enthaltenen Tangentialspannungen nicht voneinander unabhängig sind, vielmehr zwischen ihnen die drei Relationen

$$p_{xy} = p_{yx}, \quad p_{xz} = p_{zx}, \quad p_{yz} = p_{zy}$$

bestehen, mithin bereits sechs Größen zur vollständigen Beschreibung des Spannungszustands eines Kontinuums ausreichen. Auf diesen Nachweis brauchen wir uns hier jedoch nicht einzulassen, da wir uns ja ausschließlich mit einer idealen Flüssigkeit befassen wollen, für die definitionsgemäß sämtliche Tangentialspannungen verschwinden. Für eine ideale Flüssigkeit ist also

$$p_{xy} = p_{yx} = p_{xz} = p_{zx} = p_{yz} = p_{zy} = 0$$

zu setzen, so daß sich (3,2) zu

$$S_x^{(4)} = p_{xx} \cdot \cos(n, x), \quad S_y^{(4)} = p_{yy} \cdot \cos(n, y), \quad S_z^{(4)} = p_{zz} \cdot \cos(n, z) \quad (3,3)$$

vereinfacht. Andererseits aber müssen, wenn der Betrag des Vektors $\mathfrak{S}_4$ mit $|\mathfrak{S}_4|$ bezeichnet wird, die Beziehungen

$$S_x^{(4)} = |\mathfrak{S}_4| \cdot \cos(n, x), \quad S_y^{(4)} = |\mathfrak{S}_4| \cdot \cos(n, y), \quad S_z^{(4)} = |\mathfrak{S}_4| \cdot \cos(n, z)$$

bestehen, woraus durch Vergleich mit (3,3)

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = |\mathfrak{S}_4| \quad (3,4)$$

¹⁾ Das negative Vorzeichen auf den rechten Seiten dieser Gleichungen ist erforderlich, um für die Flächeninhalte ω_1^* , ω_2^* und ω_3^* positive Werte zu bekommen; denn da (n, x) , (n, y) und (n, z) stumpfe Winkel sind, so müssen $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$ und $\cos(n, z)$ negative Größen sein.

folgt. Diese Gleichung bringt die höchst bemerkenswerte Tatsache zum Ausdruck, daß in jedem bestimmten Punkt P eines Kontinuums, in dem sämtliche Tangentialspannungen verschwinden, mithin lediglich Normalspannungen auftreten, die Größe der Normalspannung in Bezug auf jedes beliebig orientierte Flächenelement denselben Wert besitzt. In einem solchen Kontinuum ist demnach der Spannungszustand in einem bestimmten Punkt durch eine einzige Größe

$$|\mathfrak{S}_4| = p \quad (3,41)$$

charakterisiert, und diese Größe p wird als der an der betreffenden Stelle herrschende *Druck* bezeichnet. Insbesondere ist also der Druck in einer idealen Flüssigkeit stets eine reine Ortsfunktion, frei von jeder Richtungs-Abhängigkeit, und es leuchtet unmittelbar ein, daß diese Tatsache die Untersuchung einer idealen Flüssigkeit ganz erheblich erleichtern wird.

§ 4. Stromlinien, Quellen und Senken.

Wir wenden uns nunmehr der Betrachtung einer idealen Flüssigkeit zu, in der irgendwelche Bewegungsvorgänge oder *Strömungen* stattfinden. Benutzen wir wieder ein bestimmtes, im Raume festliegendes rechtwinkliges Koordinatensystem, so ist jeder Punkt des von der Flüssigkeit erfüllten Raumgebiets durch seine drei Koordinaten x , y und z eindeutig gekennzeichnet. Dann können wir jedem dieser Punkte eine bestimmte *Geschwindigkeit* $\mathbf{v}$ zuordnen, d. h. einen Vektor, der nach Länge, Richtung und Richtungssinn denjenigen geradlinigen Weg angibt, den ein an dem betreffenden Punkt befindliches Flüssigkeitsteilchen¹⁾ während des Zeitraums von einer Sekunde zurücklegen würde, falls es plötzlich allen äußeren Einflüssen entzogen, mithin völlig frei sich selbst überlassen bliebe. Diese Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ wird demnach zunächst einmal eine gewisse Funktion von x , y und z sein, und zwar wollen wir im folgenden stets die Voraussetzung machen, daß sie eine stetige Ortsfunktion darstellt, sowie ebenfalls

stetige erste Ableitungen $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y}$ und $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z}$ besitzt. Außerdem aber wird

$\mathbf{v}$ natürlich im allgemeinen an einer und derselben Stelle x , y , z zu verschiedenen Zeiten t verschiedene Werte besitzen, so daß also mit jeder Flüssigkeitsströmung ein in der Regel zeitlich veränderliches *Geschwindigkeitsfeld* verbunden ist. Und zwar muß dieses Feld natürlich ein *Vektorfeld* sein, da ja die Geschwindigkeit Vektorcharakter besitzt. Nun läßt sich aber jeder Vektor in Bezug auf ein im Raume festliegendes Koordinatensystem in drei Komponenten zerspalten, die ihrerseits skalare Größen darstellen. Infolgedessen können wir unser vektorielles Geschwindigkeitsfeld als eine Übereinanderlagerung von drei skalaren, zeitlich veränder-

¹⁾ Unter einem im Raumpunkt P befindlichen *Flüssigkeitsteilchen* ist die in einer beliebig kleinen Umgebung von P enthaltene Flüssigkeitsmenge zu verstehen.

lichen Feldern auffassen, indem wir die drei *Geschwindigkeitskomponenten* $v_x(x, y, z, t)$, $v_y(x, y, z, t)$ und $v_z(x, y, z, t)$ einführen, die wegen der soeben bezüglich des Geschwindigkeitsvektors $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ getroffenen Voraussetzungen gewöhnliche stetige, mit stetigen ersten partiellen Ableitungen versehene Funktionen der Koordinaten x, y, z sowie der Zeit t sein müssen.

Zu einer anschaulichen Darstellung eines Strömungsvorgangs kann man dadurch gelangen, daß man sich das ganze flüssigkeitsgefüllte Raumgebiet von Kurven durchzogen denkt, deren Tangenten in jedem Punkt in die Richtung der jeweils dort herrschenden Geschwindigkeit weisen. Eine solche Schar von Kurven, die man als *Stromlinien* bezeichnet, liefert uns gewissermaßen eine Momentaufnahme der Strömung. Ihr Aussehen wird selbstverständlich im allgemeinen sehr wesentlich von dem Zeitpunkt der Aufnahme abhängig sein, und wenn wir daher den zeitlichen Verlauf der Bewegung fixieren wollten, so wäre dazu eine kinematographische Folge von Einzelaufnahmen erforderlich. Nur dann, wenn die Geschwindigkeit eine reine Ortsfunktion, mithin in jedem Raumpunkt von der Zeit völlig unabhängig ist, genügt bereits ein einziges Stromlinienbild, um uns die tatsächlichen Bahnen der einzelnen Flüssigkeitsteilchen vor Augen zu führen. Man nennt eine derartig zeitlich unveränderliche Flüssigkeitsbewegung eine *stationäre Strömung*; ihre Geschwindigkeitskomponenten können wir offenbar einfach in der Form $v_x(x, y, z)$, $v_y(x, y, z)$ und $v_z(x, y, z)$ schreiben, da sie ja von der Zeit t unabhängig sind.

Unser räumliches Stromlinienbild vermag uns jedoch nicht nur über die Richtungseigenschaften des Geschwindigkeitsfelds der Flüssigkeit Aufschluß zu geben. Zieht man nämlich irgendwo eine geschlossene, sich nicht überkreuzende Kurve, so bildet die Gesamtheit der die einzelnen Punkte dieser Kurve durchsetzenden Stromlinien eine sogenannte *Stromröhre*, während die von ihr abgegrenzte Flüssigkeitssäule als *Stromfaden* bezeichnet wird. Bei einer stationären Strömung ist jede solche Stromröhre als ein zeitlich beständiges Gebilde anzusehen, in dem die Flüssigkeit wie in einer aus festen Wandungen gefertigten Rohrleitung dahinfließt. Denn da die Stromlinien definitionsgemäß stets in der Richtung der Geschwindigkeit verlaufen, kann weder ein Eindringen noch ein Hinausfließen von Flüssigkeit durch die Rohrwandungen vorkommen. Nun ist aber unsere ideale Flüssigkeit inkompressibel; infolgedessen führt das universelle Gesetz von der Erhaltung der Masse zu der Forderung, daß durch jeden Querschnitt einer Stromröhre während der Zeiteinheit stets genau die gleiche Flüssigkeitsmenge hindurchgehen muß. Die einen bestimmten Röhrenquerschnitt pro Zeiteinheit passierende Flüssigkeitsmasse ist natürlich einerseits dem Flächeninhalt dieses Querschnitts proportional; andererseits aber wird sie auch der in die Normalenrichtung fallenden Komponente der in dem betr. Querschnitt herrschenden mittleren Geschwindigkeit proportional sein müssen. Längs einer bestimmten Stromröhre

ist demnach der Querschnittsinhalt stets der jeweiligen mittleren Geschwindigkeit umgekehrt proportional¹⁾; an Stellen großer Geschwindigkeit verengt sich die Röhre, während sie sich an Stellen kleiner Geschwindigkeit erweitert. Die Dicke der Stromröhre bildet auf diese Weise ein bequemes Maß der Geschwindigkeit, und so ist die Strömung durch die räumliche Schar ihrer Stromlinien sowohl in Bezug auf die Richtung als auch in Bezug auf den Betrag ihrer Geschwindigkeit anschaulich gekennzeichnet.

Bisher haben wir stillschweigend die Voraussetzung gemacht, daß an sämtlichen Stellen des durchströmten Raumgebiets weder Flüssigkeit neu zugeführt noch Flüssigkeit entnommen werden soll. Alsdann kann offenbar keine Stromlinie im Innern der Flüssigkeit entspringen oder endigen; vielmehr müssen alle Stromlinien entweder geschlossene Kurven sein, oder aber sie müssen, was natürlich nur in unbegrenzt ausgedehnten Gebieten möglich ist, nach beiden Seiten ins Unendliche sich fortsetzen. Sind jedoch sogen. *Quellen* bzw. *Senken* vorhanden, d. h. solche Gebiete, in denen auf irgendwelche Weise Flüssigkeit erzeugt bzw. vernichtet wird, so ist sehr wohl mit dem Auftreten begrenzter, also Anfangs- und Endpunkt besitzender Stromlinien zu rechnen. Wir werden uns aber mit der Untersuchung *quellenfreier Strömungen* begnügen, womit zugleich das Fehlen von Senken zum Ausdruck gebracht sein soll, indem wir eine Senke als eine „negative Quelle“ ansehen.

§ 5. Der Begriff des Flusses, die Kontinuitätsgleichung und der Begriff der Zirkulation.

Auf Grund der Voraussetzungen, die wir bezüglich der Geschwindigkeitskomponenten v_x , v_y und v_z getroffen haben, besteht dem *Gaußschen Integralsatz*²⁾ zufolge für jedes durch eine beschränkte geschlossene Fläche S aus dem flüssigkeitsdurchströmten Raumgebiet abgetrennte Teilgebiet T die Beziehung

$$\int_{(T)} \left\{ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\} d\tau = - \int_{(S)} \{ v_x \cdot \cos(n, x) + v_y \cdot \cos(n, y) + v_z \cdot \cos(n, z) \} d\omega \quad (5,1)$$

oder kürzer

$$\int_{(T)} \operatorname{div} \mathbf{v} d\tau = - \int_{(S)} v_n d\omega, \quad (5,11)$$

¹⁾ Denn aus $m = c \cdot \omega_f \cdot v_n^* = \text{const.}$ mit festem Proportionalitätsfaktor c folgt ja $\omega_f = \frac{\text{const.}}{v_n^*}$, unter ω_f den Flächeninhalt des betr. Stromröhrenquerschnitts f und unter v_n^* die in f herrschende mittlere Geschwindigkeit verstanden.

²⁾ Vgl. z. B. H. v. Mangoldt, Einführung in die höhere Mathematik Bd. III, Nr. 110.

falls v_n die Normalkomponente der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ bedeutet. Nun ist das auf der rechten Seite von (5,11) auftretende Flächenintegral definitionsgemäß als Grenzwert der über S zu erstreckenden Summe

$$\sum_i v_n^{(i)} \cdot \omega_i \quad (5,12)$$

anzusehen, wobei die ω_i die Flächeninhalte der bei irgendeiner, im Grenzübergang unbegrenzt zu verfeinernden Unterteilung von S entstehenden Flächenstückchen s_i bedeuten, und wobei mit $v_n^{(i)}$ der Wert der Funktion v_n an einer beliebigen auf s_i gelegenen Stelle bezeichnet wird. Denken wir uns s_i derartig klein, daß man in erster Näherung die Funktion v_n auf s_i als eine Konstante behandeln kann, so wird offenbar durch das Produkt $v_n^{(i)} \cdot \omega_i$ das Volumen derjenigen Flüssigkeitsmenge gemessen, die pro Sekunde durch das Flächenstück s_i hindurchströmt, und zwar in das Raumgebiet T hineinströmt, falls $v_n^{(i)}$ einen positiven, dagegen aus T herausströmt, falls $v_n^{(i)}$ einen negativen Wert besitzt. Indem wir ein Ausströmen aus T als „negatives Einstömen“ in T ansehen, können wir die Summe (5,12) als einen Näherungswert des Volumens der gesamten pro Sekunde durch die ganze Berandung S in das Raumgebiet T einfließenden Flüssigkeitsmenge deuten, und da dieser Näherungswert offenbar um so brauchbarer wird, je feiner wir die Unterteilung von S in die Teilflächen s_i wählen, so muß das Flächenintegral der Normalkomponente der Geschwindigkeit das genaue Maß der eben genannten Flüssigkeitsmenge darstellen. Man bezeichnet daher dieses Flächenintegral als den *Fluß* durch die Fläche S , und (5,11) bringt dann die Tatsache zum Ausdruck, daß *das über ein beliebiges, flüssigkeitsdurchströmtes Raumgebiet T erstreckte Raumintegral der Divergenz der Geschwindigkeit dem Fluß durch die Berandung S dieses Gebiets entgegengesetzt gleich ist.*

Nun ist aber unsere ideale Flüssigkeit inkompressibel und quellenfrei. Infolgedessen muß der Fluß durch eine beliebige geschlossene Fläche S stets verschwinden, mithin gemäß (5,11) für jedes im Strömungsraum abgegrenzte Gebiet T die Beziehung

$$\int_{(T)} \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\tau = 0 \quad (5,2)$$

bestehen. Hieraus folgt dann unmittelbar, daß die Funktion $\operatorname{div} \mathbf{v}$ im ganzen Strömungsgebiet identisch verschwinden, dort also stets die sogenannte *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (5,3)$$

gelten muß. Besäße nämlich die stetige Funktion $\operatorname{div} \mathbf{v}$ an einer beliebigen Stelle P einen von Null verschiedenen, etwa positiven Wert, so müßte sie wegen ihrer Stetigkeit auch in einer hinreichend klein gewählten Umgebung der Stelle P überall positiv sein. Ihr über diese Umgebung erstrecktes

Raumintegral könnte daher nur einen wesentlich positiven Wert annehmen, im Widerspruch zu der für jedes T gültigen Beziehung (5,2). In entsprechender Weise schließt man für den Fall negativer Funktionswerte, womit dann die Allgemeingültigkeit von (5,3) bewiesen ist.

Vom *Gaußschen* zum *Stokesschen* Integralsatz¹⁾ übergehend, erhalten wir die Relation

$$\int_{(F)} \left\{ \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \cos(n, y) + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right\} d\omega \\ = \int_{(L)} \{ v_x dx + v_y dy + v_z dz \}, \quad (5,4)$$

die für jedes beliebige, ganz im Inneren des durchströmten Gebiets gelegene, von einer geschlossenen Raumkurve L berandete Flächenstück F gültig ist. Führen wir durch die Definitionsgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_x \mathbf{v} &= \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \\ \text{rot}_y \mathbf{v} &= \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \\ \text{rot}_z \mathbf{v} &= \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (5,5)$$

den Vektor $\text{rot } \mathbf{v}$ ein und beachten, daß

$$\int_{(L)} \{ v_x dx + v_y dy + v_z dz \} = \int_{(L)} \left\{ v_x \cdot \frac{dx}{ds} + v_y \cdot \frac{dy}{ds} + v_z \cdot \frac{dz}{ds} \right\} ds \\ = \int_{(L)} \{ v_x \cdot \cos(s, x) + v_y \cdot \cos(s, y) + v_z \cdot \cos(s, z) \} ds$$

gilt, so vereinfacht sich (5,4), unter v_s die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ verstanden, zu

$$\int_{(F)} \text{rot}_n \mathbf{v} d\omega = \int_{(L)} v_s ds. \quad (5,6)$$

Indem wir dann das Kurvenintegral

$$J_L = \int_{(L)} \{ v_x dx + v_y dy + v_z dz \} = \int_{(L)} v_s ds \quad (5,61)$$

als die *Zirkulation* längs der Kurve L bezeichnen, können wir den Inhalt von (5,6) in Worten dahin formulieren, daß das über ein Flächenstück F erstreckte Flächenintegral der Normalkomponente der Rotation der Strömungsgeschwindigkeit gleich der Zirkulation längs der Berandung L von F ist. Die positive Integrationsrichtung längs der Raumkurve L soll dabei stets so gewählt werden, daß die Zirkulation (5,61) positiv ausfällt.

¹⁾ Vgl. z. B. H. v. Mangoldt, I. c. Bd. III, Nr. 119.

§ 6. Lokale und substantielle Betrachtungsweise.

Wie in § 4 hervorgehoben wurde, ist jede Flüssigkeitsströmung mit einem im allgemeinen zeitlich veränderlichen Geschwindigkeitsfeld verbunden. Andererseits muß den in § 3 gemachten Ausführungen zufolge jeder Stelle eines flüssigkeitsgefüllten Gebiets ein bestimmter Druck zugeordnet werden, so daß sich also dem vektoriellen Geschwindigkeitsfeld ein im allgemeinen ebenfalls zeitlich veränderliches Druckfeld überlagert. Infolgedessen können wir eine Flüssigkeitsbewegung dann als gegeben ansehen, wenn wir die Geschwindigkeitskomponenten und den Druck zu jeder beliebigen Zeit an jeder beliebigen Stelle des durchströmten Gebiets kennen. Bei dieser Auffassungsweise werden uns somit Geschwindigkeit und Druck als Funktionen von Raumkoordinaten und von der Zeit entgegengetreten, während von den Geschwindigkeiten individueller Flüssigkeitsteilchen¹⁾ sowie von sonstigen auf diese Teilchen selbst bezüglichen Daten keine Rede sein kann. Nun liegt es aber offenbar nahe, in engerer Anlehnung an das in der Mechanik diskreter Punktsysteme übliche Verfahren eine zweite Methode zur Anwendung zu bringen, nämlich eine Flüssigkeitsbewegung dadurch zu beschreiben, daß man die Lage sämtlicher einzelnen Flüssigkeitsteilchen in Abhängigkeit von der Zeit angibt. Als dann werden also die einzelnen Flüssigkeitsteilchen in den Vordergrund des Interesses gerückt, weshalb man diese zweite Methode als die *substantielle Betrachtungsweise* bezeichnet, im Unterschied zu der sogenannten *lokalen Betrachtungsweise*, von der zuvor die Rede war. Beide Methoden werden in der Hydro- und Aerodynamik nebeneinander gebraucht, da jede gewisse Vorzüge für sich in Anspruch nehmen kann. Insbesondere wird man die substantielle Betrachtungsweise immer dann verwenden, wenn man zu Aussagen über solche Eigenschaften gelangen will, die ein Teilchen, das sie einmal besitzt, nicht wieder zu verlieren vermag. Schon hier sei hervorgehoben, daß wir solche Eigenschaften tatsächlich sehr bald kennen lernen werden.

Um nun ein bestimmtes Flüssigkeitsteilchen aus der Gesamtheit der übrigen herauszuheben und ihm eine eindeutige Bezeichnung beizulegen, schlagen wir den folgenden Weg ein. In einem beliebigen Augenblick, als den wir unbeschadet der Allgemeinheit den Zeitpunkt $t = 0$ wählen dürfen, denken wir uns die Koordinaten aller Flüssigkeitsteilchen ermittelt. Dann ist offenbar jedes einzelne Flüssigkeitsteilchen durch Angabe dieser seiner Koordinaten zur Zeit $t = 0$ durchaus eindeutig gekennzeichnet, so daß also diese Koordinaten, die man in der hydrodynamischen Literatur durch a, b, c wiederzugeben pflegt, gewissermaßen den Namen des betr. Teilchens darstellen. Hat nun ein bestimmtes Teilchen a, b, c zur beliebigen Zeit t die Koordinaten²⁾ x^*, y^*, z^* , so werden diese neuen Koordinaten als ein-

¹⁾ Vgl. die Fußnote auf S. 14.

²⁾ Auf bestimmte Flüssigkeitsteilchen sich beziehende Größen werden wir stets durch ein Sternchen kennzeichnen, so daß also alle in diesem Zusammenhang mit Sternchen versehenen Symbole als Funktionen von a, b, c und t anzusehen sind.

deutige und stetige Funktionen der Zeit t sowie der ursprünglichen Koordinaten a, b, c erscheinen; dabei sollen sowohl die zeitlichen Ableitungen¹⁾

$$\frac{dx^*}{dt}, \frac{dy^*}{dt}, \frac{dz^*}{dt}, \frac{d^2x^*}{dt^2}, \frac{d^2y^*}{dt^2}, \frac{d^2z^*}{dt^2}$$

als auch die räumlichen Ableitungen

$$\frac{\partial x^*}{\partial a}, \frac{\partial x^*}{\partial b}, \dots, \frac{\partial z^*}{\partial c}, \frac{\partial^2 x^*}{\partial a^2}, \frac{\partial^2 x^*}{\partial a \partial b}, \dots, \frac{\partial^2 z^*}{\partial c^2}$$

sowie schließlich die gemischten Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{dx^*}{dt} \right), \dots, \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{dz^*}{dt} \right), \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^*}{\partial a} \right), \dots, \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z^*}{\partial c} \right)$$

ebenfalls stetige Funktionen ihrer vier Argumente a, b, c, t sein. Schreiben wir demnach

$$x^* = f_1(a, b, c, t), \quad y^* = f_2(a, b, c, t), \quad z^* = f_3(a, b, c, t), \quad (6,1)$$

so wird uns die ganze Strömung vollständig dann gegeben sein, sobald uns diese drei Funktionen (6,1) sowie außerdem der Druck p^* , ebenfalls als Funktion von a, b, c und t gedacht, bekannt sind. Umgekehrt müssen natürlich auch a, b und c eindeutige und stetige Funktionen von x^*, y^* und z^* sein, so daß also durch (6,1) eine stetige umkehrbar-eindeutige Zuordnung zwischen x^*, y^*, z^* einerseits und a, b, c andererseits hergestellt wird.

Diejenigen Flüssigkeitsteilchen, die zur Zeit $t = 0$ ein gewisses Raumgebiet T_0 erfüllen, werden zu einer beliebigen Zeit $t = t_1$ ein Raumgebiet T_1 erfüllen, das aus T_0 durch die Transformation (6,1) mit $t = t_1$ hervorgeht. Betrachten wir dabei insbesondere solche Teilchen, die in dem ursprünglichen Raumgebiet T_0 auf einem Kurvenstück l_0 lagen, so werden sich diese Teilchen auch in T_1 wieder auf einem Kurvenstück l_1 befinden, und umgekehrt wird l_1 nur aus solchen Teilchen bestehen, die zuvor auf dem Kurvenstück l_0 zu finden waren. Denn die Koordinaten der Punkte $P_0(a, b, c)$ von l_0 lassen sich mittels dreier Gleichungen von der Form

$$a = a(\lambda), \quad b = b(\lambda), \quad c = c(\lambda) \quad (6,11)$$

als stetige Funktionen eines Parameters λ darstellen, wobei P_0 das Kurvenstück l_0 kontinuierlich durchläuft, wenn λ stetig von einem Anfangswert $\lambda = \alpha$ bis zu einem Endwert $\lambda = \beta$ variiert, und zwar derart, daß $\lambda = \alpha$ den einen, $\lambda = \beta$ den anderen Endpunkt von l_0 ergibt. Trägt man nun die durch (6,11) gegebenen Werte von a, b, c in (6,1) ein und ersetzt dabei die Variable t durch die feste Zahl t_1 , so erscheinen jetzt auch x^*, y^*, z^* als stetige Funktionen des Parameters λ , und wenn λ von α bis β variiert, so

¹⁾ In der hydrodynamischen Literatur ist es allgemein üblich, bei der substantiellen Betrachtungsweise die partielle Ableitung nach t mit dem Symbol $\frac{d}{dt}$ und nicht $\frac{\partial}{\partial t}$ zu bezeichnen, welchem Brauch auch wir uns anschließen.

beschreibt der Punkt $P_1(x^*, y^*, z^*)$ in T_1 ein gewisses Kurvenstück l_1 , so daß jedem Punkt P_0 von l_0 ein Punkt P_1 von l_1 sowie umgekehrt jedem Punkt P_1 von l_1 ein Punkt P_0 von l_0 zugeordnet wird, womit unsere Behauptung bewiesen ist. Insbesondere gehen dabei die Endpunkte von l_0 in die Endpunkte von l_1 über, so daß also jede geschlossene Kurve L_0 in T_0 eine ebenfalls geschlossene Kurve L_1 in T_1 liefert.

In entsprechender Weise läßt sich ferner zeigen, daß solche Flüssigkeitsteilchen, die in T_0 auf einer geschlossenen Fläche $S^{(0)}$ liegen, sich auch in T_1 auf einer geschlossenen Fläche $S^{(1)}$ befinden, und umgekehrt. Daraus folgt sodann leicht, daß ein in T_0 im Inneren des von $S^{(0)}$ berandeten Innengebiets befindliches Teilchen auch in T_1 im Inneren des von $S^{(1)}$ berandeten Innengebiets liegen muß. Denn in allen Zwischenstadien der Bewegung, durch die die geschlossene Fläche $S^{(0)}$ in die geschlossene Fläche $S^{(1)}$ übergeführt wird, besteht ja die jeweils $S^{(0)}$ entsprechende geschlossene Fläche S stets aus denselben Flüssigkeitsteilchen; würde also ein ursprünglich im Inneren des von $S^{(0)}$ berandeten Innengebiets gelegenes Teilchen während der Bewegung aus dem Innengebiet in das Außengebiet von S übertreten, so müßte es dabei offenbar die Fläche S passieren, was aber der soeben festgestellten Tatsache widerspricht, da alsdann ein gewisses Flüssigkeitsteilchen in einem gewissen Zeitpunkt der Fläche S angehören würde, das sich zu Beginn der Bewegung nicht auf $S^{(0)}$ befunden hat.

§ 7. Die Eulerschen Bewegungsgleichungen.

Als grundlegendes Postulat der allgemeinen Dynamik ist das *d'Alembertsche Prinzip* bekannt, demzufolge sich bei jeder Bewegung eines materiellen Systems die äußeren Kräfte und die Trägheitswiderstände in jedem Augenblick an dem starr gedachten System das Gleichgewicht halten. Demnach muß auch in einer strömenden Flüssigkeit zu jedem beliebigen Zeitpunkt die geometrische Summe aller auf irgendeinen Flüssigkeitsteil einwirkenden äußeren Kräfte und des gesamten Trägheitswiderstandes dieses Teils verschwinden — eine Bedingung, durch deren analytische Formulierung wir nunmehr zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen der Hydrodynamik gelangen werden.

Sei z. B. K eine Kugel, die ganz im Inneren des flüssigkeitsgefüllten Raumgebiets gelegen ist. Die in einem bestimmten Zeitpunkt t auf den alsdann von K umschlossenen Flüssigkeitsteil einwirkenden äußeren Kräfte sind zunächst gewisse Massenkkräfte, die wir uns wieder, wie bereits in § 2 geschehen, zu einer Resultierenden vereinigt denken, so daß wir als rechtwinklige Komponenten der gesamten Massenkraft, wenn die Komponenten von $\mathfrak{Q}(x, y, z)$ mit $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ bezeichnet werden, die drei über den ganzen von K berandeten Kugelkörper K zu erstreckenden Raumintegrale

$$\int_{(K)} \varrho \cdot X d\tau, \int_{(K)} \varrho \cdot Y d\tau, \int_{(K)} \varrho \cdot Z d\tau$$

erhalten. Als weitere auf den betrachteten Flüssigkeitsteil zur Zeit t einwirkende äußere Kraft kommt sodann diejenige Flächenkraft hinzu, die durch den auf K herrschenden Druck p bedingt wird. Auch sie kann in drei zu den Koordinatenachsen parallele Komponenten zerlegt werden, die sich unter Beachtung der Tatsache, daß der Druck stets senkrecht zu seiner Angriffsfläche gerichtet ist, in der Form

$$\int_{(K)} p \cdot \cos(n, x) d\omega, \int_{(K)} p \cdot \cos(n, y) d\omega, \int_{(K)} p \cdot \cos(n, z) d\omega$$

schreiben lassen, falls (n, x) , (n, y) und (n, z) die Winkel bedeuten, die die ins Innere von K gerichtete Flächennormale auf K mit den positiven Richtungen der drei Koordinatenachsen einschließt. Was schließlich den gesamten Trägheitswiderstand unseres Flüssigkeitsteils zur Zeit t anbelangt, so sind seine Komponenten augenscheinlich durch die drei Raumintegrale

$$-\int_{(K)} \varrho \cdot \frac{dv_x^*}{dt} d\tau, -\int_{(K)} \varrho \cdot \frac{dv_y^*}{dt} d\tau, -\int_{(K)} \varrho \cdot \frac{dv_z^*}{dt} d\tau$$

gegeben, wobei v_x^* , v_y^* , v_z^* die Geschwindigkeitskomponenten des zur Zeit t an der Stelle (x, y, z) befindlichen Flüssigkeitsteilchens bezeichnen¹⁾. Anwendung des d'Alembertschen Prinzips liefert demnach die drei Relationen

$$\begin{aligned} \int_{(K)} \varrho \cdot X d\tau + \int_{(K)} p \cdot \cos(n, x) d\omega - \int_{(K)} \varrho \cdot \frac{dv_x^*}{dt} d\tau &= 0, \\ \int_{(K)} \varrho \cdot Y d\tau + \int_{(K)} p \cdot \cos(n, y) d\omega - \int_{(K)} \varrho \cdot \frac{dv_y^*}{dt} d\tau &= 0, \\ \int_{(K)} \varrho \cdot Z d\tau + \int_{(K)} p \cdot \cos(n, z) d\omega - \int_{(K)} \varrho \cdot \frac{dv_z^*}{dt} d\tau &= 0, \end{aligned}$$

die sich auf Grund des Gauss'schen Integralsatzes auch in der Form

$$\begin{aligned} \int_{(K)} \left\{ \varrho \cdot X - \frac{\partial p}{\partial x} - \varrho \cdot \frac{dv_x^*}{dt} \right\} d\tau &= 0, \\ \int_{(K)} \left\{ \varrho \cdot Y - \frac{\partial p}{\partial y} - \varrho \cdot \frac{dv_y^*}{dt} \right\} d\tau &= 0, \\ \int_{(K)} \left\{ \varrho \cdot Z - \frac{\partial p}{\partial z} - \varrho \cdot \frac{dv_z^*}{dt} \right\} d\tau &= 0 \end{aligned}$$

¹⁾ Vgl. Fußnote 2) auf S. 19.

schreiben lassen. Und da dieses Gleichungssystem für jeden beliebigen Kugelkörper K bestehen muß, so ergeben sich daraus¹⁾ wegen der Stetigkeit der drei Integranden die für jede Stelle des flüssigkeitsdurchströmten Raumgebiets gültigen Relationen

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x^*}{dt} &= X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv_y^*}{dt} &= Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{dv_z^*}{dt} &= Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (7,1)$$

in denen die Bewegungsgleichungen der Hydrodynamik ihren vorläufigen Ausdruck gefunden haben.

Als vorläufig muß die Form der Gleichungen (7,1) deshalb bezeichnet werden, weil in ihr teils lokale, teils substantielle Glieder enthalten sind. Tatsächlich bedeuten ja v_x^* , v_y^* , v_z^* die Geschwindigkeitskomponenten bestimmter Flüssigkeitsteilchen, d. h. also substantielle Größen, während z. B. der Druck p als lokale Größe eingeführt wurde. Um die Bewegungsgleichungen zunächst in rein lokaler Form zu gewinnen, haben wir zu beachten, daß z. B. $v_x^* = \frac{dx^*}{dt}$ für jedes einzelne Teilchen zu einem bestimmten Zeitpunkt t mit derjenigen lokalen Geschwindigkeitskomponente $v_x(x, y, z, t)$ übereinstimmt, für die

$$x = x^*(t), \quad y = y^*(t), \quad z = z^*(t)$$

gilt. Demnach ist also

$$v_x^* = \frac{dx^*}{dt} = v_x \{x^*(t), y^*(t), z^*(t), t\}$$

zu setzen, so daß

$$\frac{dv_x^*}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \frac{dx^*}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot \frac{dy^*}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot \frac{dz^*}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial t}$$

oder

$$\frac{dv_x^*}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot v_z + \frac{\partial v_x}{\partial t}$$

wird. Entsprechende Gleichungen ergeben sich für $\frac{dv_y^*}{dt}$ und $\frac{dv_z^*}{dt}$, und

¹ Vgl. hierzu die auf S. 17/18 angestellte Überlegung.

wenn wir diese Ausdrücke in (7,1) eintragen, so erhalten wir die der lokalen Betrachtungsweise angepaßten Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_x}{\partial t} &= X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}, \\ v_x \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_y}{\partial t} &= Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}, \\ v_x \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial t} &= Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (7,2)$$

die als die *Eulerschen Bewegungsgleichungen* bezeichnet werden. Für den Spezialfall stationärer Strömungen wird

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0,$$

und wenn überdies die Massenkkräfte konservativer Natur sind, d. h. ein Potential $U(x, y, z)$ besitzen, mithin

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z} \quad (7,21)$$

gilt, so nehmen die *Eulerschen* Gleichungen (7,2) die einfachere Form

$$\left. \begin{aligned} v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(U + \frac{p}{\rho} \right), \\ v_x \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_y}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(U + \frac{p}{\rho} \right), \\ v_x \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(U + \frac{p}{\rho} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7,3)$$

an, in der wir sie im folgenden ausschließlich benutzen werden.

Was ist nun der physikalische Sinn dieser Gleichungen?

Den Ausgangspunkt unserer Untersuchungen bildete eine strömende ideale Flüssigkeit. Jedem Punkt des durchströmten Gebiets ordneten wir einen Geschwindigkeitsvektor mit den Komponenten v_x, v_y, v_z sowie außerdem eine Größe p zu, die wir als Druck bezeichnet und mit deren physikalischer Deutung wir uns in § 3 befaßt haben. Indem wir uns auf stationäre Strömungen beschränkten, konnten wir die vier Größen v_x, v_y, v_z und p als reine Ortsfunktionen voraussetzen. Eine bestimmte Strömung ist dann durch vier bestimmte Funktionen $v_x(x, y, z), v_y(x, y, z), v_z(x, y, z)$ und $p(x, y, z)$ charakterisiert; wir können sie als gegeben ansehen, wenn uns jene vier Funktionen bekannt sind. Diese Funktionen sind aber keineswegs willkürlich wählbar, sondern sie müssen einerseits der

Kontinuitätsgleichung (5,3), andererseits den *Eulerschen* Gleichungen (7,3) genügen. Durch diese vier Gleichungen werden dann gewisse Funktionenquadrupel aus der Gesamtheit aller überhaupt denkbaren Funktionen von vier Variablen ausgesondert, und so können wir unsere bisherigen Ergebnisse dahin zusammenfassen, daß die Gesamtheit aller möglichen stationären Strömungen einer idealen Flüssigkeit durch die Gesamtheit aller Lösungen der partiellen Differentialgleichungen (5,3) und (7,3) dargestellt wird, mithin die Hydrodynamik der idealen Flüssigkeiten sich im wesentlichen auf die Theorie dieser Differentialgleichungen reduziert.

Genau wie nun in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen unter gewissen, hier nicht näher zu erörternden Voraussetzungen die Existenz einer einzigen, durch geeignete *Anfangsbedingungen* völlig festgelegten Lösung gelehrt wird, und wie sich auf Grund dieser Tatsache ein physikalisch vollständig gekennzeichnetes Problem aus der Dynamik materieller Punkte auf eine und nur eine Weise mathematisch lösen läßt, genau so werden wir erwarten dürfen, daß auch ein physikalisch vollständig bestimmtes Strömungsproblem eine einzige mathematisch festlegbare Lösung zuläßt. Neben den mannigfaltigsten Möglichkeiten von Anfangsbedingungen besitzen hier vor allem die verschiedenartigsten *Randbedingungen* Interesse, d. h. solche Einschränkungen, die den gesuchten Funktionen an den Berandungen des flüssigkeitsgefüllten Gebiets aufzuerlegen sind. Das einfachste derartige Beispiel bietet der Fall einer Flüssigkeitsbewegung in einem aus festen Wandungen gefertigten Gefäß. An diesen Wandungen muß offenbar die Strömungsgeschwindigkeit stets *t a n g e n t i a l* gerichtet, mithin ihre Normalkomponente v_n gleich Null sein; denn sonst würde ja die Flüssigkeit in die Wandungen einströmen oder aber sich von ihnen ablösen, was beides als ausgeschlossen gelten soll. Sind also (n, x) , (n, y) und (n, z) die Winkel, die die positive Normalenrichtung an der Randstelle (x, y, z) mit den positiven Richtungen der Koordinatenachsen einschließt, so muß für sämtliche Randpunkte die Beziehung

$$v_n(x, y, z) = v_x(x, y, z) \cdot \cos(n, x) + v_y(x, y, z) \cdot \cos(n, y) + v_z(x, y, z) \cdot \cos(n, z) = 0$$

bestehen. Für die Oberfläche eines festen, durch eine Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{B}$ sich hindurchbewegenden Körpers wird man auf Grund einer analogen Überlegung zu der Randbedingung

$$v_n = v_x \cdot \cos(n, x) + v_y \cdot \cos(n, y) + v_z \cdot \cos(n, z) = V_n \quad (7,4)$$

geführt¹⁾, und wenn eine freie, mit der Erdatmosphäre in Berührung stehende Oberfläche vorhanden ist, so muß an ihr der Flüssigkeitsdruck p dem jeweils herrschenden Luftdruck gleich sein.

¹⁾ In dieser Gleichung bezieht sich n natürlich auf die positive Normalenrichtung in den Punkten (x, y, z) der Oberfläche des festen Körpers, so daß also z. B. unter V_n die Normalkomponente der Körpergeschwindigkeit $\mathfrak{B}$ an der Berandung des Körpers zu verstehen ist.

Wenn nun auch aus physikalischen Gründen die Lösbarkeit solcher *Randwertprobleme* unmittelbar einleuchtend erscheinen mag, so werden wir uns doch damit in mathematischer Hinsicht nicht zufrieden geben dürfen, vielmehr uns in jedem Einzelfall die Frage vorzulegen haben, ob ein den jeweils vorgeschriebenen Bedingungen genügendes Lösungssystem der hydrodynamischen Grundgleichungen existiert, und ob es durch diese Bedingungen auch als einzig mögliche Lösung bestimmt ist. Wenn mancher Physiker oder Techniker die Führung solcher Existenz- und Einzigkeitsbeweise für überflüssig zu halten geneigt ist, weil die Existenz einer vollständig bestimmten Lösung physikalischer Probleme durch den gesetzmäßigen Ablauf alles Naturgeschehens sichergestellt sei, so liegt dieser Ansicht ein prinzipielles Mißverständnis des Charakters jeder mathematisch-physikalischen Forschung zugrunde. Naturgesetzlichkeit — falls solche im wahrsten Sinne des Wortes überhaupt existieren sollte — und mathematische Gesetzmäßigkeit haben an sich nicht das mindeste miteinander zu tun. Die mathematische Physik operiert, wie ja bereits in der Einleitung hervorgehoben wurde, mit rein abstrakten Begriffsbildungen, die weitgehend idealisierte Bilder der physikalischen Wirklichkeit darstellen; und diese Bilder sind dann als zweckmäßig (und nicht etwa als „richtig“!) anzusehen, wenn die auf mathematischem Wege aus ihnen abgeleiteten Folgerungen ihr Gegenstück in der physikalischen Wirklichkeit finden, wenn also, um bekannte Worte von *H. Hertz* hier anzuführen, die den notwendigen Folgen der Bilder stets wieder die Bilder von den naturnotwendigen Folgen der abgebildeten Gegenstände sind¹⁾. Wenn nun ein derartig idealisiertes Bild unter gewissen Bedingungen, die einem naturgesetzlich völlig bestimmten Vorgang entsprechen, eine und nur eine Lösung zu liefern vermag, so ist hierin ein erster Hinweis auf die Zweckmäßigkeit dieses Bildes zu erblicken; als selbstverständlich aber darf eine derartige Übereinstimmung zwischen naturgesetzlicher und mathematisch-gesetzlicher Folgerung niemals vorausgesetzt werden.

§ 8. Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen und die Webersche Transformation.

Um jetzt die Bewegungsgleichungen einer idealen Flüssigkeit in einer der substantiellen Betrachtungsweise angepaßten Form zu erhalten, haben wir zunächst zu beachten, daß

$$v_x^* = \frac{dx^*}{dt}, \quad v_y^* = \frac{dy^*}{dt}, \quad v_z^* = \frac{dz^*}{dt} \quad (8,1)$$

zu setzen ist. Multiplizieren wir dann die erste der Gleichungen (7,1) mit

¹⁾ Vgl. *H. Hertz*, Gesammelte Werke Bd. III, S. 1 (Leipzig 1910).

$\frac{\partial x^*}{\partial a}$, die zweite mit $\frac{\partial y^*}{\partial a}$, die dritte mit $\frac{\partial z^*}{\partial a}$ und addieren alles, so ergibt sich

$$\left(\frac{d^2 x^*}{dt^2} - X\right) \cdot \frac{\partial x^*}{\partial a} + \left(\frac{d^2 y^*}{dt^2} - Y\right) \cdot \frac{\partial y^*}{\partial a} + \left(\frac{d^2 z^*}{dt^2} - Z\right) \cdot \frac{\partial z^*}{\partial a} = -\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p^*}{\partial a},$$

da ja

$$\frac{\partial p}{\partial x} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial a} + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{\partial z^*}{\partial a} = \frac{\partial p^*}{\partial a}$$

gilt. Zwei analoge Gleichungen folgen aus (7,1) durch Multiplikation mit $\frac{\partial x^*}{\partial b}$, $\frac{\partial y^*}{\partial b}$, $\frac{\partial z^*}{\partial b}$ bzw. mit $\frac{\partial x^*}{\partial c}$, $\frac{\partial y^*}{\partial c}$, $\frac{\partial z^*}{\partial c}$, so daß wir zu dem Gleichungstrippel

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d^2 x^*}{dt^2} - X\right) \cdot \frac{\partial x^*}{\partial a} + \left(\frac{d^2 y^*}{dt^2} - Y\right) \cdot \frac{\partial y^*}{\partial a} + \left(\frac{d^2 z^*}{dt^2} - Z\right) \cdot \frac{\partial z^*}{\partial a} &= -\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p^*}{\partial a}, \\ \left(\frac{d^2 x^*}{dt^2} - X\right) \cdot \frac{\partial x^*}{\partial b} + \left(\frac{d^2 y^*}{dt^2} - Y\right) \cdot \frac{\partial y^*}{\partial b} + \left(\frac{d^2 z^*}{dt^2} - Z\right) \cdot \frac{\partial z^*}{\partial b} &= -\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p^*}{\partial b}, \\ \left(\frac{d^2 x^*}{dt^2} - X\right) \cdot \frac{\partial x^*}{\partial c} + \left(\frac{d^2 y^*}{dt^2} - Y\right) \cdot \frac{\partial y^*}{\partial c} + \left(\frac{d^2 z^*}{dt^2} - Z\right) \cdot \frac{\partial z^*}{\partial c} &= -\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p^*}{\partial c} \end{aligned} \right\} (8,2)$$

gelangen, das sich bei Existenz eines Kräftepotentials U unter Beachtung von (7,21) zu

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x^*}{dt^2} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial a} + \frac{d^2 y^*}{dt^2} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial a} + \frac{d^2 z^*}{dt^2} \cdot \frac{\partial z^*}{\partial a} &= -\frac{\partial}{\partial a} \left(U^* + \frac{p^*}{\varrho} \right), \\ \frac{d^2 x^*}{dt^2} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial b} + \frac{d^2 y^*}{dt^2} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial b} + \frac{d^2 z^*}{dt^2} \cdot \frac{\partial z^*}{\partial b} &= -\frac{\partial}{\partial b} \left(U^* + \frac{p^*}{\varrho} \right), \\ \frac{d^2 x^*}{dt^2} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial c} + \frac{d^2 y^*}{dt^2} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial c} + \frac{d^2 z^*}{dt^2} \cdot \frac{\partial z^*}{\partial c} &= -\frac{\partial}{\partial c} \left(U^* + \frac{p^*}{\varrho} \right) \end{aligned} \right\} (8,21)$$

vereinfacht. Die Gleichungen (8,2) bzw. (8,21) werden in der hydrodynamischen Literatur als die *Lagrangeschen Bewegungsgleichungen* bezeichnet, obwohl auch sie zum ersten Mal von *Euler* angegeben wurden.

Den *Eulerschen* Bewegungsgleichungen gesellte sich als weitere lokale Bedingungsgleichung die Kontinuitätsgleichung (5,3) zu, die nunmehr ebenfalls ihr substantielles Gegenstück erhalten muß. Dies gelingt durch Formulierung der Tatsache, daß sich die zur Zeit $t = 0$ in einem bestimmten Raumgebiet T_0 eingeschlossene Flüssigkeitsmasse nicht ändern kann, wenn sie infolge der Bewegung (vgl. S. 20) zur Zeit $t = t_1$ das Raumgebiet T_1 erfüllt. Es muß daher die Beziehung

$$\iiint_{(T_0)} \varrho \, da \, db \, dc = \iiint_{(T_1)} \varrho \, dx^* \, dy^* \, dz^*$$

bestehen¹⁾, die sich auf Grund der Regel für die Transformation mehrfacher Integrale²⁾ in der Form

$$\iiint_{(T_0)} \varrho \, da \, db \, dc = \iiint_{(T_0)} \varrho \cdot |D| \, da \, db \, dc \quad (8,3)$$

schreiben läßt, falls

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^*}{\partial a} & \frac{\partial y^*}{\partial a} & \frac{\partial z^*}{\partial a} \\ \frac{\partial x^*}{\partial b} & \frac{\partial y^*}{\partial b} & \frac{\partial z^*}{\partial b} \\ \frac{\partial x^*}{\partial c} & \frac{\partial y^*}{\partial c} & \frac{\partial z^*}{\partial c} \end{vmatrix} \quad (8,31)$$

gesetzt wird. Da aber (6,1) eine umkehrbar-eindeutige Zuordnung zwischen T_0 und T_1 vermittelt, so muß die Funktionaldeterminante D stets dasselbe Vorzeichen besitzen. Für $t = 0$ gilt nun $x^* = a$, $y^* = b$, $z^* = c$, mithin

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x^*}{\partial a} = \frac{\partial y^*}{\partial b} = \frac{\partial z^*}{\partial c} &= 1, \\ \frac{\partial y^*}{\partial a} = \frac{\partial z^*}{\partial a} = \frac{\partial x^*}{\partial b} = \frac{\partial z^*}{\partial b} = \frac{\partial x^*}{\partial c} = \frac{\partial y^*}{\partial c} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8,32)$$

so daß gemäß (8,31) für $t = 0$ der Wert von D positiv, nämlich gleich 1, wird. Infolgedessen ist D beständig positiv, also $|D| = D$, und (8,3) kann wegen der Konstanz von ϱ in der Form

$$\iiint_{(T_0)} (D - 1) \, da \, db \, dc = 0$$

geschrieben werden. Da diese Gleichung für jedes beliebige Raumgebiet T_0 bestehen muß, und da der Integrand eine stetige Funktion ist, so folgt (vgl. S. 17/18) als *substantielle Form der Kontinuitätsgleichung* die einfache Beziehung

$$D = 1, \quad (8,33)$$

die sich wegen (8,31) ausführlicher in der Form

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x^*}{\partial a} \cdot \left(\frac{\partial y^*}{\partial b} \cdot \frac{\partial z^*}{\partial c} - \frac{\partial z^*}{\partial b} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial c} \right) - \frac{\partial x^*}{\partial b} \cdot \left(\frac{\partial y^*}{\partial a} \cdot \frac{\partial z^*}{\partial c} - \frac{\partial z^*}{\partial a} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial c} \right) \\ + \frac{\partial x^*}{\partial c} \cdot \left(\frac{\partial y^*}{\partial a} \cdot \frac{\partial z^*}{\partial b} - \frac{\partial z^*}{\partial a} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial b} \right) &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (8,34)$$

schreiben läßt.

¹⁾ Denn wegen $\varrho = \frac{dm}{d\tau}$ (vgl. S. 3) ist die in T_0 eingeschlossene Masse durch $\int_{(T_0)} \varrho \, d\tau$ = $\iiint_{(T_0)} \varrho \, da \, db \, dc$ und die in T_1 eingeschlossene Masse durch $\int_{(T_1)} \varrho \, d\tau = \iiint_{(T_1)} \varrho \, dx^* \, dy^* \, dz^*$ gegeben.

²⁾ Vgl. z. B. G. Kowalewski, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, 3. Auflage, § 231.

Im Zusammenhang mit den *Lagrangeschen* Bewegungsgleichungen haben wir eine wichtige Umformung derselben zu erwähnen, die als die *Webersche Transformation* bezeichnet wird¹⁾. Integrieren wir die erste der drei Gleichungen (8,21) nach der Zeit zwischen den Grenzen t und 0, so ergibt sich

$$\int_0^t \left\{ \frac{d^2 x^*}{dt^2} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial a} + \frac{d^2 y^*}{dt^2} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial a} + \frac{d^2 z^*}{dt^2} \cdot \frac{\partial z^*}{\partial a} \right\} dt = - \frac{\partial}{\partial a} \int_0^t \left(U^* + \frac{p^*}{\varrho} \right) dt,$$

woraus durch partielle Integration unter Berücksichtigung der für $t = 0$ gültigen Beziehungen (8,32)

$$\begin{aligned} \frac{dx^*}{dt} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial a} + \frac{dy^*}{dt} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial a} + \frac{dz^*}{dt} \cdot \frac{\partial z^*}{\partial a} - v_{x_0}^* - \int_0^t \left\{ \frac{dx^*}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^*}{\partial a} \right) \right. \\ \left. + \frac{dy^*}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y^*}{\partial a} \right) + \frac{dz^*}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z^*}{\partial a} \right) \right\} dt = - \frac{\partial}{\partial a} \int_0^t \left(U^* + \frac{p^*}{\varrho} \right) dt \end{aligned}$$

mit

$$v_{x_0}^* = \left(\frac{dx^*}{dt} \right)_{t=0} \quad (8,41)$$

folgt. Mit Beachtung der auf S. 20 formulierten Stetigkeitsvoraussetzungen gilt aber z. B.

$$\frac{dx^*}{dt} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^*}{\partial a} \right) = \frac{dx^*}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{dx^*}{dt} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{dx^*}{dt} \right)^2,$$

und wenn wir zur Abkürzung

$$\chi^* = \int_0^t \left\{ U^* + \frac{p^*}{\varrho} - \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{dx^*}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy^*}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz^*}{dt} \right)^2 \right] \right\} dt \quad (8,42)$$

setzen sowie die zweite und dritte der Gleichungen (8,21) in entsprechender Weise behandeln, so erhalten wir die drei Relationen

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx^*}{dt} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial a} + \frac{dy^*}{dt} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial a} + \frac{dz^*}{dt} \cdot \frac{\partial z^*}{\partial a} - v_{x_0}^* &= - \frac{\partial \chi^*}{\partial a}, \\ \frac{dx^*}{dt} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial b} + \frac{dy^*}{dt} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial b} + \frac{dz^*}{dt} \cdot \frac{\partial z^*}{\partial b} - v_{y_0}^* &= - \frac{\partial \chi^*}{\partial b}, \\ \frac{dx^*}{dt} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial c} + \frac{dy^*}{dt} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial c} + \frac{dz^*}{dt} \cdot \frac{\partial z^*}{\partial c} - v_{z_0}^* &= - \frac{\partial \chi^*}{\partial c}, \end{aligned} \right\} \quad (8,43)$$

¹⁾ Vgl. H. Weber, Crelles Journal Bd. 68, S. 286, 1868.

die zusammen mit (8,42) und der Kontinuitätsgleichung (8,34) die fünf Bedingungsgleichungen darstellen, denen die fünf für jeden Strömungsvorgang charakteristischen Größen x^* , y^* , z^* , p^* und χ^* als Funktionen ihrer Argumente a , b , c und t genügen müssen.

§ 9. Die allgemeinste Bewegung eines Flüssigkeitsteilchens.

Aus der Kinematik ist der Satz bekannt, daß sich die allgemeinste Bewegung eines starren Systems während eines hinreichend kleinen Zeitintervalls aus einer Translation und einer Rotation zusammensetzen läßt. Es liegt daher die Frage nahe, ob man nicht auch eine beliebige Strömung einer Flüssigkeit in gewisse besonders einfache Bewegungstypen zergliedern kann. Nun vermag eine Flüssigkeit nicht nur ihre räumliche Lage, sondern außerdem auch ihre Gestalt zu ändern, und diese Tatsache berechtigt zu der Vermutung, daß hier die Dinge wesentlich komplizierter als bei den starren Körpern liegen werden. Es zeigt sich aber, daß man zu recht einfachen und anschaulichen Ergebnissen gelangt, wenn man lediglich einen beliebig kleinen Teil der Flüssigkeit betrachtet, mithin die Ortsveränderung untersucht, die ein einzelnes Flüssigkeitsteilchen während eines kurzen Zeitraums erleidet.

Sei P_0 ein in einem flüssigkeitsdurchströmten Gebiet T gelegener Punkt mit den auf ein im Raume ruhendes rechtwinkliges Achsensystem bezogenen Koordinaten x_0 , y_0 , z_0 , in dem die drei Geschwindigkeitskomponenten zur Zeit $t = t_1$ die Werte $v_x^{(0)}$, $v_y^{(0)}$, $v_z^{(0)}$ besitzen mögen. Sind dann v_x , v_y , v_z die Geschwindigkeitskomponenten zur Zeit t_1 in einem ebenfalls in T gelegenen Punkt $P(x, y, z)$, und gehört überdies die geradlinige Verbindungsstrecke der beiden Punkte P_0 und P vollständig dem Gebiet T an, so gilt auf Grund der auf S. 15 getroffenen Stetigkeitsvoraussetzungen gemäß dem ersten Mittelwertsatz der Differentialrechnung z. B.

$$v_x = v_x^{(0)} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)_\vartheta \cdot (x - x_0) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_\vartheta \cdot (y - y_0) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \right)_\vartheta \cdot (z - z_0),$$

wobei $\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)_\vartheta$, $\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_\vartheta$, $\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \right)_\vartheta$ die Werte von $\frac{\partial v_x}{\partial x}$, $\frac{\partial v_x}{\partial y}$, $\frac{\partial v_x}{\partial z}$ an der Stelle

$$\xi = x_0 + \vartheta \cdot (x - x_0), \quad \eta = y_0 + \vartheta \cdot (y - y_0), \quad \zeta = z_0 + \vartheta \cdot (z - z_0)$$

mit

$$0 \leq \vartheta \leq 1$$

bedeuten. Beschränken wir uns jedoch auf solche Punkte P , die einer hinreichend kleinen Umgebung des Bezugspunktes P_0 angehören, so dürfen

wir in erster Näherung $\vartheta = 0$ wählen, wodurch wir zu dem Ansatz

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_x^{(0)} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)_0 \cdot (x - x_0) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_0 \cdot (y - y_0) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \right)_0 \cdot (z - z_0), \\ v_y &= v_y^{(0)} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \right)_0 \cdot (x - x_0) + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)_0 \cdot (y - y_0) + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} \right)_0 \cdot (z - z_0), \\ v_z &= v_z^{(0)} + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \right)_0 \cdot (x - x_0) + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} \right)_0 \cdot (y - y_0) + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)_0 \cdot (z - z_0) \end{aligned} \right\} \quad (9,1)$$

gelangen, durch den das Geschwindigkeitsfeld im Inneren des zur Zeit $t = t_1$ im Punkte P_0 befindlichen Flüssigkeitsteilchens vollständig beschrieben wird. Infolge der Bewegung erreicht dieses Teilchen im Zeitpunkt $t > t_1$ eine Stelle P'_0 mit den Koordinaten x'_0, y'_0, z'_0 , wobei dem zuvor betrachteten Punkt $P(x, y, z)$ der Punkt P' mit den Koordinaten x', y', z' entsprechen möge. Wählen wir das Zeitintervall $t - t_1$ hinreichend klein, so darf

$$\left. \begin{aligned} x'_0 &= x_0 + v_x^{(0)} \cdot (t - t_1), & x' &= x + v_x \cdot (t - t_1), \\ y'_0 &= y_0 + v_y^{(0)} \cdot (t - t_1), & y' &= y + v_y \cdot (t - t_1), \\ z'_0 &= z_0 + v_z^{(0)} \cdot (t - t_1), & z' &= z + v_z \cdot (t - t_1) \end{aligned} \right\} \quad (9,11)$$

gesetzt werden, woraus mit Benutzung der Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)_0 \cdot (t - t_1) &= \alpha_1, & \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)_0 \cdot (t - t_1) &= \alpha_2, & \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \right)_0 \cdot (t - t_1) &= \alpha_3, \\ \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} \right)_0 \cdot (t - t_1) &= \beta_1, & \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)_0 \cdot (t - t_1) &= \beta_2, & \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} \right)_0 \cdot (t - t_1) &= \beta_3, \\ \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} \right)_0 \cdot (t - t_1) &= \gamma_1, & \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} \right)_0 \cdot (t - t_1) &= \gamma_2, & \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)_0 \cdot (t - t_1) &= \gamma_3 \end{aligned} \right\} \quad (9,21)$$

unter Beachtung¹⁾ von (9,1)

$$\left. \begin{aligned} x' &= x'_0 + (\alpha_1 + 1) \cdot (x - x_0) + \alpha_2 \cdot (y - y_0) + \alpha_3 \cdot (z - z_0), \\ y' &= y'_0 + \beta_1 \cdot (x - x_0) + (\beta_2 + 1) \cdot (y - y_0) + \beta_3 \cdot (z - z_0), \\ z' &= z'_0 + \gamma_1 \cdot (x - x_0) + \gamma_2 \cdot (y - y_0) + (\gamma_3 + 1) \cdot (z - z_0) \end{aligned} \right\} \quad (9,22)$$

¹⁾ Setzt man z. B. die erste der Gleichungen (9,1) in die erste Gleichung des zweiten Gleichungstriplets (9,11) ein, so ergibt sich mit (9,21) zunächst

$$x' = x + v_x^{(0)} \cdot (t - t_1) + \alpha_1 \cdot (x - x_0) + \alpha_2 \cdot (y - y_0) + \alpha_3 \cdot (z - z_0),$$

und hieraus folgt dann die erste der Gleichungen (9,22) unter Beachtung der Tatsache, daß gemäß der ersten Gleichung des ersten Gleichungstriplets (9,11)

$$v_x^{(0)} \cdot (t - t_1) = x'_0 - x_0$$

gilt.

bezw.

$$\left. \begin{aligned} u_x &= u_x^{(o)} + \alpha_1 \cdot (x - x_0) + \alpha_2 \cdot (y - y_0) + \alpha_3 \cdot (z - z_0), \\ u_y &= u_y^{(o)} + \beta_1 \cdot (x - x_0) + \beta_2 \cdot (y - y_0) + \beta_3 \cdot (z - z_0), \\ u_z &= u_z^{(o)} + \gamma_1 \cdot (x - x_0) + \gamma_2 \cdot (y - y_0) + \gamma_3 \cdot (z - z_0) \end{aligned} \right\} \quad (9,23)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} u_x^{(o)} &= x'_0 - x_0, \quad u_y^{(o)} = y'_0 - y_0, \quad u_z^{(o)} = z'_0 - z_0, \\ u_x &= x' - x, \quad u_y = y' - y, \quad u_z = z' - z \end{aligned} \right\} \quad (9,24)$$

folgt. Durch (9,22) werden die neuen Koordinaten x', y', z' , durch (9,23) die entsprechenden Verrückungen u_x, u_y, u_z als lineare Funktionen der ursprünglichen Koordinaten x, y, z ausgedrückt, und da die Koeffizienten (9,21) nach Voraussetzung infinitesimale Größen sind, so haben wir's hier mit einer *infinitesimalen linearen Transformation* bezw. mit einer *infinitesimalen linearen Verrückung* zu tun.

Eine wichtige Eigenschaft der infinitesimalen linearen Transformationen besteht nun darin, daß die *Hintereinanderausführung* zweier solcher Transformationen durch eine *einzige infinitesimale lineare Transformation* ersetzt werden kann, die von der Reihenfolge, in der die beiden Einzeltransformationen ausgeführt werden, völlig unabhängig ist. Wird nämlich zunächst auf $P(x, y, z)$ die Transformation (9,22) und alsdann auf den dabei erhaltenen Punkt $P'(x', y', z')$ die ebenfalls infinitesimale lineare Transformation

$$\left. \begin{aligned} x'' &= x_0'' + (\lambda_1 + 1) \cdot (x' - x_0') + \lambda_2 \cdot (y' - y_0') + \lambda_3 \cdot (z' - z_0'), \\ y'' &= y_0'' + \mu_1 \cdot (x' - x_0') + (\mu_2 + 1) \cdot (y' - y_0') + \mu_3 \cdot (z' - z_0'), \\ z'' &= z_0'' + \nu_1 \cdot (x' - x_0') + \nu_2 \cdot (y' - y_0') + (\nu_3 + 1) \cdot (z' - z_0') \end{aligned} \right\} \quad (9,25)$$

ausgeübt, so ergibt sich durch Eintragen von (9,22) in (9,25) unter Beachtung des infinitesimalen Charakters aller Transformationskoeffizienten

$$\left. \begin{aligned} x'' &= x_0'' + (\alpha_1 + \lambda_1 + 1) \cdot (x - x_0) + (\alpha_2 + \lambda_2) \cdot (y - y_0) \\ &\quad + (\alpha_3 + \lambda_3) \cdot (z - z_0), \\ y'' &= y_0'' + (\beta_1 + \mu_1) \cdot (x - x_0) + (\beta_2 + \mu_2 + 1) \cdot (y - y_0) \\ &\quad + (\beta_3 + \mu_3) \cdot (z - z_0), \\ z'' &= z_0'' + (\gamma_1 + \nu_1) \cdot (x - x_0) + (\gamma_2 + \nu_2) \cdot (y - y_0) \\ &\quad + (\gamma_3 + \nu_3 + 1) \cdot (z - z_0), \end{aligned} \right\} \quad (9,26)$$

und dieses Gleichungstripel stellt offenbar wiederum eine infinitesimale lineare Transformation dar, durch die $P(x, y, z)$ unmittelbar in $P''(x'', y'', z'')$ übergeführt wird. Durch Vertauschung der Koeffizienten in (9,22) und (9,25) bleibt (9,26) wegen der Kommutativität der Addition ungeändert, womit unsere Behauptung bewiesen ist. Umgekehrt kann jede infinitesimale lineare Transformation in beliebige Einzeltransformationen aufgespalten werden, die in willkürlich wählbarer Reihenfolge ausführbar sind.

Die Bedeutung der soeben erkannten Tatsache liegt darin, daß sie die in (9,23) notierte allgemeinste infinitesimale lineare Verrückung in solche

speziellen Verrückungen zu zerlegen gestattet, die eine anschauliche physikalische Deutung zulassen. Indem wir als Bezugspunkt P_0 der Einfachheit halber den Koordinatenanfangspunkt $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ nehmen, können wir nämlich (9,23) in der Form

$$\left. \begin{aligned} u_x &= u_x^{(0)} + u_x' + u_x'', \\ u_y &= u_y^{(0)} + u_y' + u_y'', \\ u_z &= u_z^{(0)} + u_z' + u_z'' \end{aligned} \right\} \quad (9,3)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} u_x' &= -\frac{1}{2}(\beta_1 - \alpha_2) \cdot y + \frac{1}{2}(\alpha_3 - \gamma_1) \cdot z, \\ u_y' &= \frac{1}{2}(\beta_1 - \alpha_2) \cdot x - \frac{1}{2}(\gamma_2 - \beta_3) \cdot z, \\ u_z' &= -\frac{1}{2}(\alpha_3 - \gamma_1) \cdot x + \frac{1}{2}(\gamma_2 - \beta_3) \cdot y \end{aligned} \right\} \quad (9,31)$$

und

$$\left. \begin{aligned} u_x'' &= \alpha_1 \cdot x + \frac{1}{2}(\beta_1 + \alpha_2) \cdot y + \frac{1}{2}(\alpha_3 + \gamma_1) \cdot z, \\ u_y'' &= \frac{1}{2}(\beta_1 + \alpha_2) \cdot x + \beta_2 \cdot y + \frac{1}{2}(\gamma_2 + \beta_3) \cdot z, \\ u_z'' &= \frac{1}{2}(\alpha_3 + \gamma_1) \cdot x + \frac{1}{2}(\gamma_2 + \beta_3) \cdot y + \gamma_3 \cdot z \end{aligned} \right\} \quad (9,32)$$

schreiben. Dann sehen wir zunächst, daß die allgemeine Verrückung (9,3) eine von x, y, z völlig unabhängige, durch die konstanten Größen $u_x^{(0)}, u_y^{(0)}, u_z^{(0)}$ bestimmte Verrückung enthält, die auf eine einfache *Translation* des ganzen Flüssigkeitsteilchens zurückzuführen ist¹⁾. Die Verrückung (9,31) dagegen wird, wie sich sehr leicht zeigen läßt, durch eine *Rotation* des Flüssigkeitsteilchens um eine gewisse, durch den Mittelpunkt des Teilchens hindurchgehende Achse verursacht. Denn dreht sich $P(x, y, z)$ um den Winkel ω_1 im positiven Sinn um die X-Achse, so gelangt er dabei an eine Stelle P_1 , deren Koordinaten x_1, y_1, z_1 durch

$$x_1 = x, \quad y_1 = \cos \omega_1 \cdot y - \sin \omega_1 \cdot z, \quad z_1 = \sin \omega_1 \cdot y + \cos \omega_1 \cdot z$$

gegeben sind. Eine weitere Drehung in positiver Richtung um die Y-Achse mit dem Drehungswinkel ω_2 führe $P_1(x_1, y_1, z_1)$ in $P_2(x_2, y_2, z_2)$ über; alsdann gilt

$$x_2 = \cos \omega_2 \cdot x_1 + \sin \omega_2 \cdot z_1, \quad y_2 = y_1, \quad z_2 = -\sin \omega_2 \cdot x_1 + \cos \omega_2 \cdot z_1,$$

und wenn schließlich $P_2(x_2, y_2, z_2)$ durch eine positive Drehung um die Z-Achse mit dem Drehungswinkel ω_3 in $P_3(x_3, y_3, z_3)$ übergeht, so muß

$$x_3 = \cos \omega_3 \cdot x_2 - \sin \omega_3 \cdot y_2, \quad y_3 = \sin \omega_3 \cdot x_2 + \cos \omega_3 \cdot y_2, \quad z_3 = z_2$$

sein. Sind aber sämtliche Drehungswinkel infinitesimale Größen, so können wir wegen der bekannten Relationen

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\cos \omega - 1}{\omega} = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin \omega}{\omega} = 1$$

¹⁾ Denn $u_x^{(0)}, u_y^{(0)}, u_z^{(0)}$ stellen ja gemäß (9,24) die Komponenten der Verrückung des Bezugspunktes $P_0(x_0, y_0, z_0)$ dar, und eben diese Verrückung wird gemäß (9,3) von sämtlichen Punkten $P(x, y, z)$ des betr. Flüssigkeitsteilchens mitgemacht.

die Näherungswerte

$$\cos \omega_\nu = 1, \sin \omega_\nu = \omega_\nu \quad (\nu = 1, 2, 3)$$

benutzen. Durch Elimination von x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 ergeben sich dann die infolge der genannten drei Partialdrehungen resultierenden Gesamtverrückungen zu

$$\begin{aligned} x_3 - x &= -\omega_3 \cdot y + \omega_2 \cdot z, \\ y_3 - y &= \omega_3 \cdot x - \omega_1 \cdot z, \\ z_3 - z &= -\omega_2 \cdot x + \omega_1 \cdot y, \end{aligned}$$

die genau die Form der in (9,31) verzeichneten Verrückungen besitzen. Diese Verrückungen sind demnach tatsächlich auf eine Drehung des Flüssigkeitsteilchens zurückzuführen, und zwar sind dabei die Drehungswinkel um die Koordinatenachsen durch

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(\gamma_2 - \beta_3), \omega_2 = \frac{1}{2}(\alpha_3 - \gamma_1), \omega_3 = \frac{1}{2}(\beta_1 - \alpha_2)$$

gegeben, so daß gemäß (9,21) für die Winkelgeschwindigkeitskomponenten

$$\left. \begin{aligned} w_x &= \frac{\omega_1}{t-t_1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \\ w_y &= \frac{\omega_2}{t-t_1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \\ w_z &= \frac{\omega_3}{t-t_1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9,4)$$

folgt¹⁾, wofür wir unter Beachtung von (5,5) auch kürzer

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2} \cdot \text{rot } \mathbf{v} \quad (9,41)$$

schreiben können.

Was schließlich die dritte aus der allgemeinen infinitesimalen linearen Verrückung (9,3) abgetrennte spezielle Verrückung (9,32) anbelangt, so wird zu erwarten sein, daß diese durch eine Formänderung des Flüssigkeitsteilchens bedingt wird. Tatsächlich ist sie auf eine sogenannte *Dilatation* nach drei zueinander senkrechten *Dilatationsachsen* E, H, Z mit den zugehörigen *Hauptdilatationen* $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ zurückzuführen, worunter eine solche Koordinatentransformation zu verstehen ist, bei der ein auf das EHZ -System bezogener Punkt $Q(\xi, \eta, \zeta)$ in einen Punkt $Q'(\xi', \eta', \zeta')$ mit

$$\xi' = (1 + \sigma_1) \cdot \xi, \quad \eta' = (1 + \sigma_2) \cdot \eta, \quad \zeta' = (1 + \sigma_3) \cdot \zeta$$

übergeht. Auf Wiedergabe des Beweises dieser Behauptung können wir hier aber verzichten, da wir sie im folgenden niemals verwerten werden. Zusammenfassend sei nur noch einmal kurz wiederholt, daß sich die allgemeinste Bewegung eines einzelnen Flüssigkeitsteilchens während eines hinreichend kurzen Zeitintervalls in eine Translation, eine Rotation um eine durch das Teilchen hindurchgehende Achse sowie eine Dilatation nach drei zueinander senkrechten Richtungen zerlegen läßt.

¹⁾ unter Fortlassung des auf den willkürlichen Bezugspunkt P_0 hinweisenden Index 0.

Zweites Kapitel.

Wirbelfreie Flüssigkeitsbewegungen.

§ 10. Das Geschwindigkeitspotential einer wirbelfreien Flüssigkeitsbewegung.

An die in § 9 durchgeführte Untersuchung der allgemeinsten Bewegung eines Flüssigkeitsteilchens knüpft sich eine Einteilung der Gesamtheit aller Strömungen in zwei Klassen, die ganz wesentlich auf den folgenden, von *Lagrange* herrührenden Satz sich gründet: *Wenn bei einer Strömung einer idealen Flüssigkeit, die unter dem Einfluß konservativer Kräfte vor sich geht, die Bewegung eines bestimmten Flüssigkeitsteilchens zu einem bestimmten Zeitpunkt drehungsfrei erfolgt, so ist die Bewegung dieses Teilchens auch zu jedem anderen Zeitpunkt drehungsfrei.*

Da dieses Theorem eine auf ein bestimmtes Flüssigkeitsteilchen sich beziehende Aussage enthält, werden wir uns zu seinem Beweis naturgemäß der substantiellen Betrachtungsweise bedienen. Demnach fassen wir ein bestimmtes Flüssigkeitsteilchen ins Auge, das sich zur Zeit $t = 0$ an einer Stelle mit den Koordinaten a, b, c befindet, und dessen Winkelgeschwindigkeitskomponenten zu diesem Zeitpunkt gemäß (9,4) durch

$$\left. \begin{aligned} 2w_a^* &= \frac{\partial v_{z_0}^*}{\partial b_i^*} - \frac{\partial v_{y_0}^*}{\partial c}, & 2w_b^* &= \frac{\partial v_{x_0}^*}{\partial c} - \frac{\partial v_{z_0}^*}{\partial a}, \\ 2w_c^* &= \frac{\partial v_{y_0}^*}{\partial a} - \frac{\partial v_{x_0}^*}{\partial b} \end{aligned} \right\} \quad (10,1)$$

gegeben sind. Zur beliebigen Zeit t an eine Stelle (x^*, y^*, z^*) gelangt, haben seine Winkelgeschwindigkeitskomponenten die Werte

$$2w_x^* = \frac{\partial v_z^*}{\partial y^*} - \frac{\partial v_y^*}{\partial z^*}, \quad 2w_y^* = \frac{\partial v_x^*}{\partial z^*} - \frac{\partial v_z^*}{\partial x^*}, \quad 2w_z^* = \frac{\partial v_y^*}{\partial x^*} - \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} \quad (10,11)$$

angenommen. Schreiben wir nun (8,43) mit Berücksichtigung von (8,1) in der Form

$$\begin{aligned} v_{x_0}^* &= v_x^* \cdot \frac{\partial x^*}{\partial a} + v_y^* \cdot \frac{\partial y^*}{\partial a} + v_z^* \cdot \frac{\partial z^*}{\partial a} + \frac{\partial \chi^*}{\partial a}, \\ v_{y_0}^* &= v_x^* \cdot \frac{\partial x^*}{\partial b} + v_y^* \cdot \frac{\partial y^*}{\partial b} + v_z^* \cdot \frac{\partial z^*}{\partial b} + \frac{\partial \chi^*}{\partial b}, \\ v_{z_0}^* &= v_x^* \cdot \frac{\partial x^*}{\partial c} + v_y^* \cdot \frac{\partial y^*}{\partial c} + v_z^* \cdot \frac{\partial z^*}{\partial c} + \frac{\partial \chi^*}{\partial c}, \end{aligned}$$

so liefert hiernach die erste der drei Gleichungen (10,1) unter Beachtung der auf S. 20 formulierten Stetigkeitsvoraussetzungen

$$2w_a^* = \frac{\partial v_x^*}{\partial b} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial c} - \frac{\partial v_x^*}{\partial c} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial b} + \frac{\partial v_y^*}{\partial b} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial c} - \frac{\partial v_y^*}{\partial c} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial b} \\ + \frac{\partial v_z^*}{\partial b} \cdot \frac{\partial z^*}{\partial c} - \frac{\partial v_z^*}{\partial c} \cdot \frac{\partial z^*}{\partial b}$$

oder

$$2w_a^* = \left(\frac{\partial v_z^*}{\partial y^*} - \frac{\partial v_y^*}{\partial z^*} \right) \cdot \left(\frac{\partial y^*}{\partial b} \cdot \frac{\partial z^*}{\partial c} - \frac{\partial y^*}{\partial c} \cdot \frac{\partial z^*}{\partial b} \right) \\ + \left(\frac{\partial v_x^*}{\partial z^*} - \frac{\partial v_z^*}{\partial x^*} \right) \cdot \left(\frac{\partial z^*}{\partial b} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial c} - \frac{\partial z^*}{\partial c} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial b} \right) \\ + \left(\frac{\partial v_y^*}{\partial x^*} - \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} \right) \cdot \left(\frac{\partial x^*}{\partial b} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial c} - \frac{\partial x^*}{\partial c} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial b} \right),$$

da ja z. B.

$$\frac{\partial v_x^*}{\partial b} = \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial b} + \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial b} + \frac{\partial v_x^*}{\partial z^*} \cdot \frac{\partial z^*}{\partial b}$$

gilt. Entsprechende Ausdrücke ergeben die zweite und dritte der Gleichungen (10,1), so daß wir mit Berücksichtigung von (10,11) zunächst das Gleichungssystem

$$w_a^* = \left(\frac{\partial y^*}{\partial b} \cdot \frac{\partial z^*}{\partial c} - \frac{\partial y^*}{\partial c} \cdot \frac{\partial z^*}{\partial b} \right) \cdot w_x^* + \left(\frac{\partial z^*}{\partial b} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial c} - \frac{\partial z^*}{\partial c} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial b} \right) \cdot w_y^* \\ + \left(\frac{\partial x^*}{\partial b} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial c} - \frac{\partial x^*}{\partial c} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial b} \right) \cdot w_z^*,$$

$$w_b^* = \left(\frac{\partial y^*}{\partial c} \cdot \frac{\partial z^*}{\partial a} - \frac{\partial y^*}{\partial a} \cdot \frac{\partial z^*}{\partial c} \right) \cdot w_x^* + \left(\frac{\partial z^*}{\partial c} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial a} - \frac{\partial z^*}{\partial a} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial c} \right) \cdot w_y^* \\ + \left(\frac{\partial x^*}{\partial c} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial a} - \frac{\partial x^*}{\partial a} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial c} \right) \cdot w_z^*,$$

$$w_c^* = \left(\frac{\partial y^*}{\partial a} \cdot \frac{\partial z^*}{\partial b} - \frac{\partial y^*}{\partial b} \cdot \frac{\partial z^*}{\partial a} \right) \cdot w_x^* + \left(\frac{\partial z^*}{\partial a} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial b} - \frac{\partial z^*}{\partial b} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial a} \right) \cdot w_y^* \\ + \left(\frac{\partial x^*}{\partial a} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial b} - \frac{\partial x^*}{\partial b} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial a} \right) \cdot w_z^*$$

bekommen. Multiplizieren wir dann die erste dieser Gleichungen mit $\frac{\partial x^*}{\partial a}$, die zweite mit $\frac{\partial x^*}{\partial b}$, die dritte mit $\frac{\partial x^*}{\partial c}$ und addieren alles, so er-

halten wir unter Beachtung von (8,34)

$$w_x^* = \frac{\partial x^*}{\partial a} \cdot w_a^* + \frac{\partial x^*}{\partial b} \cdot w_b^* + \frac{\partial x^*}{\partial c} \cdot w_c^*. \quad (10,21)$$

Ebenso folgt durch Multiplikation mit $\frac{\partial y^*}{\partial a}$, $\frac{\partial y^*}{\partial b}$ bzw. $\frac{\partial y^*}{\partial c}$ und nachfolgende Addition

$$w_y^* = \frac{\partial y^*}{\partial a} \cdot w_a^* + \frac{\partial y^*}{\partial b} \cdot w_b^* + \frac{\partial y^*}{\partial c} \cdot w_c^* \quad (10,22)$$

sowie schließlich durch Multiplikation mit $\frac{\partial z^*}{\partial a}$, $\frac{\partial z^*}{\partial b}$ bzw. $\frac{\partial z^*}{\partial c}$ und nachfolgende Addition

$$w_z^* = \frac{\partial z^*}{\partial a} \cdot w_a^* + \frac{\partial z^*}{\partial b} \cdot w_b^* + \frac{\partial z^*}{\partial c} \cdot w_c^*. \quad (10,23)$$

Aus den auf diese Weise abgeleiteten Gleichungen (10,21) — (10,23), durch die w_x^* , w_y^* , w_z^* als homogene lineare Funktionen von w_a^* , w_b^* , w_c^* dargestellt werden und die man als die *Cauchyschen Relationen* bezeichnet, folgt aber mit

$$w_a^* = w_b^* = w_c^* = 0$$

sofort

$$w_x^* = w_y^* = w_z^* = 0,$$

womit das oben formulierte Theorem bewiesen ist.

Indem man nun solche Teile einer Flüssigkeit, in der die einzelnen Flüssigkeitsteilchen um gewisse durch sie hindurchgehende Achsen rotieren, als *Wirbel* bezeichnet, spricht man im Falle einer überall drehungslos erfolgenden Bewegung von einer *wirbelfreien Flüssigkeitsströmung*. Gemäß (9,41) ist demnach eine wirbelfreie Flüssigkeitsbewegung dadurch charakterisiert, daß der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}$ an sämtlichen Stellen des Strömungsgebiets der Bedingung

$$\text{rot } \mathbf{v} = 0 \quad (10,3)$$

genügt, wofür wir unter Benutzung der in (5,5) angegebenen Komponentendarstellung des Vektors $\text{rot } \mathbf{v}$ auch

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (10,31)$$

schreiben können. Diese Gleichungen lehren aber die Existenz einer Funktion $\varphi(x, y, z, t)$ von der Beschaffenheit, daß

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (10,4)$$

gilt¹⁾, und umgekehrt ziehen die Gleichungen (10,4) das Bestehen der drei Relationen (10,31) nach sich. Bei einer wirbelfreien Flüssigkeitsbewegung lassen sich somit die drei Geschwindigkeitskomponenten $v_x(x, y, z, t)$, $v_y(x, y, z, t)$ und $v_z(x, y, z, t)$ aus einer einzigen Funktion $\varphi(x, y, z, t)$ ableiten, und diese Funktion wird das Geschwindigkeitspotential der betr. Bewegung genannt. Infolgedessen pflegt man die rotationslos oder wirbelfrei erfolgenden Flüssigkeitsbewegungen auch als *Potentialströmungen* zu bezeichnen. Liegt insbesondere eine stationäre Potentialströmung vor, so stellt natürlich das Geschwindigkeitspotential eine reine Ortsfunktion $\varphi(x, y, z)$ dar.

In physikalischer Hinsicht kommt den Potentialströmungen eine überaus große Bedeutung zu. Denn da auf Grund des oben bewiesenen *Lagrange'schen Theorems* in einer idealen Flüssigkeit niemals Drehbewegungen neu entstehen können, solange lediglich konservative äußere Kräfte wirksam sind, so darf jede Strömung, die unter dem Einfluß konservativer Kräfte in einer ursprünglich im Ruhezustand befindlichen idealen Flüssigkeit vor sich geht, ohne weiteres als eine reine Potentialströmung behandelt werden.

§ 11. Eindeutigkeit und Mehrdeutigkeit des Geschwindigkeitspotentials.

Zu sehr bemerkenswerten Eigenschaften des Geschwindigkeitspotentials einer wirbelfreien Flüssigkeitsbewegung gelangen wir durch die Betrachtung gewisser geometrischer Eigentümlichkeiten der durchströmten Raumgebiete. Wenn in einem von einer beschränkten geschlossenen Fläche S begrenzten Raumgebiet T eine geschlossene Kurve L gezogen wird, die nirgends aus T heraustritt, so läßt sich diese Kurve durch stetige Abänderungen auf einen im Inneren von T gelegenen Punkt zusammenziehen, ohne dabei jemals die Berandung S von T zu durchsetzen. Eine solche Kurve wollen wir in T *reduzierbar* nennen, und die soeben erkannte Tatsache, daß sämtliche ganz in T verlaufenden geschlossenen Kurven in T *reduzierbar* sind, soll dadurch zum Ausdruck gebracht werden, daß wir T als ein *einfach zusammenhängendes Raumgebiet* bezeichnen. Demnach stellt z. B. jeder Kugelkörper oder jedes parallelepipedisch begrenzte Gebiet ein einfach zusammenhängendes Raumgebiet dar. Aber auch das Außengebiet T' einer beliebigen beschränkten geschlossenen Fläche S ist, wie man unmittelbar einsieht, stets ein einfach zusammenhängendes Raumgebiet. Wenn wir dagegen (vgl. Fig. 4) durch zwei einander gegenüberliegende Seitenflächen eines Parallelepipedons S einen Zylinder Z legen,

¹⁾ Denn die Gleichungen (10,31) stellen bekanntlich die notwendige und hinreichende Bedingung dafür dar, daß der Differentialausdruck $v_x dx + v_y dy + v_z dz$ das totale Differential $d\varphi$ einer Funktion φ ist, mithin

$$v_x dx + v_y dy + v_z dz = d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

gilt, woraus unmittelbar (10,4) zu entnehmen ist (vgl. z. B. H. v. Mangoldt, Einführung in die höhere Mathematik Bd. III, Nr. 109).

so ist das von dem Parallelepipedon S einerseits sowie dem Zylinder Z andererseits berandete Gebiet T_1 nicht mehr einfach zusammenhängend,

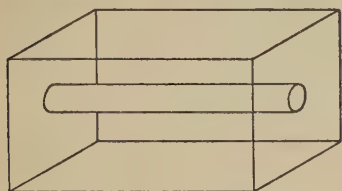


Fig. 4.

denn jede ganz in T_1 verlaufende geschlossene Kurve L , die den Zylinder Z umschlingt, ist in T_1 sicherlich nicht reduzierbar. Wollte man nämlich eine solche Kurve L durch stetige Abänderungen auf einen Punkt zusammenziehen, so müßte man dabei auf jeden Fall den Zylinder Z , mithin einen Teil der Berandung des Raumgebiets T_1 , durchsetzen,

was eben für eine in T_1 reduzierbare Kurve unzulässig ist. Legt man jedoch in der aus Fig. 5 ersichtlichen Weise durch eine Erzeugende des

Zylinders Z ein ebenes Flächenstück F , das von dieser Erzeugenden sowie von denjenigen drei Geraden begrenzt wird, in denen die zugehörige Ebene das Parallelepipedon S schneidet, so entsteht dadurch ein einfach zusammenhängendes Gebiet T_2 , dessen Berandung von S , Z und F gebildet wird. Denn nunmehr ist ja jede ganz im Inneren von T_2 gelegene ge-

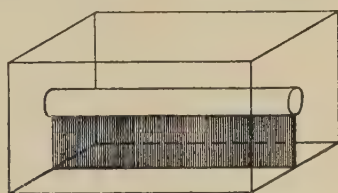


Fig. 5.

geschlossene Kurve ohne weiteres in T_2 reduzierbar. Man bezeichnet das zuvor betrachtete Gebiet T_1 als ein *zweifach zusammenhängendes Raumgebiet*, indem man ganz allgemein von einem *n -fach zusammenhängenden Raumgebiet* dann spricht, falls sich das betr. Gebiet durch $n - 1$ geeignet gezogene Querschnitte in ein einfach zusammenhängendes Raumgebiet überführen läßt. Dabei ist unter einem *Querschnitt* ein Flächenstück zu verstehen, das ein beliebiges Raumgebiet durchsetzt, und das von denjenigen Kurven begrenzt wird, in denen es die Berandung des betr. Raumgebiets schneidet.

Durchaus entsprechende Definitionen lassen sich, wie wir gleich an dieser Stelle erwähnen wollen, auch für ebene Gebiete aufstellen. Ist B ein von einer beschränkten geschlossenen Kurve C berandetes ebenes Gebiet und C_1 irgendeine ganz im Inneren von B verlaufende geschlossene Kurve, so ist C_1 stets in B *reduzierbar*, will sagen durch stetige Abänderungen auf einen im Inneren von B gelegenen Punkt zusammenziehbar, ohne dabei jemals die Berandung C von B zu durchsetzen. Wir können somit jedes von einer beschränkten geschlossenen Kurve berandete ebene Gebiet (also z. B. jede Kreisfläche) als ein *einfach zusammenhängendes ebenes Gebiet* bezeichnen. Unter einem *Querschnitt* werden wir hier ein Kurvenstück zu verstehen haben, das ein beliebig berandetes ebenes Gebiet durchsetzt, und dessen Endpunkte auf der Berandung des betr. Gebiets gelegen sind. Indem wir dann ein ebenes Gebiet *n -fach zusammenhängend* nennen, falls es sich durch

$n - 1$ geeignet gezogene Querschnitte in ein einfach zusammenhängendes ebenes Gebiet überführen läßt, erkennen wir z. B., daß eine von zwei konzentrischen Kreisen k_1 und k_2 berandete Kreisringfläche B_1 zweifach zusammenhängend ist. Denn alle den inneren Kreis k_1 umziehenden, in B_1 verlaufenden geschlossenen Kurven sind sicherlich nicht in B_1 reduzierbar, während andererseits eine Strecke A_1A_2 , die einen Punkt A_1 des Kreises k_1 mit einem Punkt A_2 des Kreises k_2 verbindet, sofort ein einfach zusammenhängendes ebenes Gebiet erzeugt. Auch wenn der Kreis k_1 auf den gemeinsamen Mittelpunkt M zusammengezogen wird, mithin M als ein nicht zum Inneren des von k_2 berandeten Gebiets B_1 gehöriger Punkt angesehen wird, erhalten wir ein zweifach zusammenhängendes ebenes Gebiet, da ja jede geschlossene Kurve, die den Kreismittelpunkt M umschlingt, eine nicht in B_1 reduzierbare Kurve darstellt, während andererseits wiederum jeder von M zu einem beliebigen Punkt auf k_2 führende Kreisradius ein einfach zusammenhängendes Gebiet liefern muß.

Sei nunmehr zunächst ein einfach zusammenhängendes Raumgebiet T_1 gegeben, in dem eine Potentialströmung einer idealen Flüssigkeit stattfindet. Dann ist also jede ganz in T_1 verlaufende geschlossene Kurve L in T_1 reduzierbar, und es existiert stets ein von L berandetes Flächenstück F , das ganz im Inneren des Strömungsgebiets T_1 verbleibt. Für sämtliche Punkte eines solchen Flächenstücks F sind daher die Beziehungen (10,31) erfüllt, so daß Anwendung von (5,4)

$$\int_{(L)} \{v_x dx + v_y dy + v_z dz\} = 0 \quad (11,1)$$

oder mit Benutzung von (5,61)

$$J_L = \int_{(L)} v_s ds = 0 \quad (11,11)$$

ergibt. *In einem einfach zusammenhängenden Strömungsgebiet besitzt demnach für den Fall einer wirbelfrei erfolgenden Flüssigkeitsbewegung die Zirkulation J_L längs jeder im Strömungsgebiet verlaufenden geschlossenen Kurve L stets den Wert Null.* Nun ist die in der positiven Richtung der Tangente an L zu nehmende Geschwindigkeitskomponente v_s durch

$$v_s = v_x \cdot \cos(s, x) + v_y \cdot \cos(s, y) + v_z \cdot \cos(s, z)$$

gegeben, wofür wir unter Berücksichtigung von (10,4) auch

$$v_s = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} \quad (11,12)$$

schreiben können. Infolgedessen lehrt (11,11), daß unter den hier getroffenen Voraussetzungen

$$\int_{(L)} \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = 0 \quad (11,13)$$

gilt, mithin die Gesamtänderung, die die Ortsfunktion φ beim einmaligen Umlauf um eine in T_1 gelegene geschlossene Kurve L erfährt, stets den Wert Null besitzt. Dies besagt jedoch nichts anderes, als daß *das Geschwindigkeitspotential einer in einem einfach zusammenhängenden Raumgebiet wirbelfrei vor sich gehenden Flüssigkeitsströmung eine eindeutige Ortsfunktion ist.*

Betrachten wir dagegen ein zweifach zusammenhängendes Strömungsgebiet T_2 , so zerfällt die Gesamtheit der in T_2 verlaufenden geschlossenen Kurven in zwei Klassen, nämlich einerseits in solche, die in T_2 reduzierbar, andererseits aber in solche, die in T_2 nicht reduzierbar sind. Für jede in T_2 reduzierbare geschlossene Kurve L existiert auch hier wieder ein ganz in T_2 gelegenes, von L berandetes Flächenstück F , so daß alsdann die Relation (11,11) bestehen bleibt, mithin die Zirkulation längs einer reduzierbaren Kurve nach wie vor den Wert Null besitzt. Fassen wir jedoch jetzt eine in T_2 nicht reduzierbare geschlossene Kurve L_1 ins Auge, so muß notwendigerweise jedes von ihr berandete Flächenstück solche Teile enthalten, die nicht zum flüssigkeitserfüllten Gebiet gehören und für die somit die Beziehungen (10,31) ihren Sinn verlieren. Infolgedessen können bei den in T_2 nicht reduzierbaren geschlossenen Kurven sehr wohl von Null verschiedene Zirkulationen in Betracht kommen. Dabei besteht nun aber die wichtige Einschränkung, daß die bei einmaligem Umlauf erhaltene Zirkulation für sämtliche in einem zweifach zusammenhängenden Strömungsgebiet nicht reduzierbaren geschlossenen Kurven einen und denselben Wert besitzt, mithin eine für die betr. Potentialströmung charakteristische Konstante darstellt. Um diesen Satz zu beweisen, greifen wir zwei sich nicht schneidende, im Inneren des zweifach zusammenhängenden Gebiets T_2 verlaufende und in T_2 nicht reduzierbare geschlossene Kurven heraus, die wir mit L_1 und L_2 bezeichnen. Als dann verbinden wir einen Punkt A_1 auf L_1 mit einem Punkt A_2 auf L_2 durch eine ganz im Inneren von T_2 gelegene Linie l , und betrachten ein gleichfalls ganz in T_2 verbleibendes Flächenstück F , das von der aus L_1 , L_2 sowie der doppelt zu durchlaufenden Linie l gebildeten geschlossenen Kurve L berandet wird. Für alle Punkte dieses Flächenstücks F sind alsdann die Beziehungen (10,31) erfüllt, so daß sich also durch Anwendung von (5,4) für die Zirkulation längs L

$$J_L = \int_{(L)} v_s ds = 0 \quad (11,2)$$

ergibt. Da aber

$$\int_{(L)} v_s ds = \int_{(L_1)} v_s ds + \int_{(l)} v_s ds + \int_{(-L_2)} v_s ds + \int_{(-l)} v_s ds$$

zu setzen ist¹⁾, und da

$$\int_{(-l)} v_s ds = - \int_{(l)} v_s ds, \quad \int_{(-L_2)} v_s ds = - \int_{(L_2)} v_s ds$$

¹⁾ Hierbei weist ein der Angabe des Integrationswegs hinzugefügtes Minuszeichen darauf hin, daß der betr. Weg bei Ausführung der Integration in dem zur positiven Umlaufrichtung entgegengesetzten Sinn zu durchlaufen ist.

gilt, so muß gemäß (11,2)

$$\int_{(L_1)} v_s ds = \int_{(L_2)} v_s ds$$

sein, womit die Gleichheit der Zirkulationen längs der beiden beliebig gewählten Kurven L_1 und L_2 bewiesen ist.

Die Tatsache, daß bei einer Potentialströmung, die in einem zweifach zusammenhängenden Raumgebiet T_2 erfolgt, die Zirkulation längs einer in T_2 nicht reduzierbaren geschlossenen Kurve nicht notwendig zu verschwinden braucht, führt bezüglich der Natur des Geschwindigkeitspotentials einer derartigen Strömung zu einer sehr bemerkenswerten Schlußfolgerung. Da nämlich

$$J = \int_{(L_1)} v_s ds = \int_{(L_1)} \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds \quad (11,21)$$

die von der Wahl von L_1 völlig unabhängige Änderung mißt, die die Funktion φ nach einmaligem Umlauf um eine geschlossene, in T_2 nicht reduzierbare Kurve L_1 erfährt, so wird φ bei von Null verschiedenem J nicht zu seinem Ausgangswert zurückkehren, sondern sich von diesem Wert um den Betrag der Konstanten J unterscheiden. Allgemeiner wird bei n -maligem Umlauf längs L_1 der Unterschied auf $n \cdot J$ anwachsen, so daß φ an einer und derselben Stelle unendlich viele Werte besitzt, die sich untereinander um ganzzahlige Vielfache von J unterscheiden. *Bei der Untersuchung einer Potentialströmung, die in einem zweifach zusammenhängenden Gebiet erfolgt, ist daher mit der Möglichkeit eines mehrdeutigen Geschwindigkeitspotentials zu rechnen, wobei jedoch die einzelnen Werte, deren das Geschwindigkeitspotential an einer bestimmten Stelle fähig ist, lediglich um ganzzahlige Vielfache der konstanten Zirkulation J voneinander abweichen können¹⁾.*

Im engsten Zusammenhang mit den hier behandelten Dingen steht die Frage, ob bei einer wirbelfrei vor sich gehenden Flüssigkeitsbewegung *geschlossene Stromlinien* auftreten können. Bezeichnen wir den Betrag des Geschwindigkeitsvektors $\mathbf{v}$ mit v , so ist für eine geschlossene Stromlinie L auf Grund der in § 4 gegebenen Definition der Stromlinien

$$J = \int_{(L)} v_s ds = \int_{(L)} v ds \quad (11,3)$$

zu setzen. Da nun v als absoluter Betrag eines von Null verschiedenen Vektors eine positive Größe darstellt, so besitzt das Integral

$$\int_{(L)} v ds$$

¹⁾ Eine Verallgemeinerung dieses Ergebnisses auf den Fall eines n -fach ($n > 2$) zusammenhängenden Strömungsgebiets bereitet keine Schwierigkeiten, kann jedoch hier unterdrückt werden, da wir später keinen Gebrauch davon machen werden.

einen positiven, von Null verschiedenen Wert. Infolgedessen muß gemäß (11,3) die Zirkulation J längs einer geschlossenen Stromlinie stets von Null verschieden sein. Während daher bei solchen Potentialströmungen, die in einem einfach zusammenhängenden Raumgebiet erfolgen, sicherlich keine geschlossenen Stromlinien möglich sind, können bei einer in einem zweifach zusammenhängenden Gebiet vor sich gehenden Potentialströmung unter Umständen geschlossene Stromlinien auftreten.

§ 12. Die Bewegungsgleichungen einer stationären Potentialströmung.

Um jetzt die Bewegungsgleichungen einer idealen Flüssigkeit für den Fall einer reinen Potentialströmung aufzustellen, beginnen wir mit einer einfachen Umformung der *Eulerschen* Bewegungsgleichungen. Wegen

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \quad (12,1)$$

wird

$$\begin{aligned} v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) + v_y \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + v_z \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \\ v_x \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v^2}{2} \right) + v_x \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + v_z \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right), \\ v_x \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v^2}{2} \right) + v_x \cdot \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + v_y \cdot \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \end{aligned}$$

wofür wir unter Berücksichtigung von (9,4) auch

$$\begin{aligned} v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) + 2 \cdot (v_z \cdot w_y - v_y \cdot w_z), \\ v_x \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_y}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v^2}{2} \right) + 2 \cdot (v_x \cdot w_z - v_z \cdot w_x), \\ v_x \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v^2}{2} \right) + 2 \cdot (v_y \cdot w_x - v_x \cdot w_y) \end{aligned}$$

schreiben können. Einführung dieser Ausdrücke in (7,3) liefert

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\varrho} \right\} &= 2 \cdot (v_y \cdot w_z - v_z \cdot w_y), \\ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\varrho} \right\} &= 2 \cdot (v_z \cdot w_x - v_x \cdot w_z), \\ \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\varrho} \right\} &= 2 \cdot (v_x \cdot w_y - v_y \cdot w_x), \end{aligned} \right\} \quad (12,2)$$

womit die gewünschte Umformung bereits erreicht ist.

Haben wir's nun mit einer stationären Potentialströmung zu tun, so ist wegen (9,4) und (10,31)

$$w_x = w_y = w_z = 0$$

zu setzen, so daß (12,2) die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\varrho} \right\} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\varrho} \right\} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\varrho} \right\} = 0$$

ergibt. Hieraus folgt durch Integration

$$\frac{v^2}{2} + U + \frac{p}{\varrho} = \text{const.}$$

oder, unter p_0 eine Konstante verstanden,

$$p = p_0 - \varrho \cdot \left(\frac{v^2}{2} + U \right). \quad (12,3)$$

Diese Gleichung wird als die *Bernoullische Gleichung* bezeichnet. Geht die Bewegung ohne Einwirkung äußerer Kräfte vor sich, so vereinfacht sich (12,3) zu

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \varrho v^2 \quad (12,4)$$

oder

$$q = p_0 - p, \quad (12,41)$$

falls

$$q = \frac{1}{2} \varrho v^2 \quad (12,42)$$

gesetzt wird. Alsdann bedeutet die Konstante p_0 den Druck in einem *Staupunkt* der Strömung, d. h. an einer solchen Stelle, an der die Geschwindigkeit v den Wert Null besitzt. Gemäß (12,41) mißt demnach q den Überdruck, den ein Staupunkt gegenüber einer Stelle P mit der Strö-

nungsgeschwindigkeit v aufzuweisen hat, weshalb q der *Staudruck* an der Stelle P genannt wird. Dieser Staudruck spielt in der Flugtechnik eine wichtige Rolle, da er wegen der Konstanz der Luftdichte ρ einfach als Maß der Strömungsgeschwindigkeit v benutzt werden kann. Will man anstelle von ρ das spezifische Gewicht γ der Luft verwenden, so ist

$$q = \frac{\gamma}{2g} \cdot v^2 \quad (12,43)$$

zu setzen, falls g die Beschleunigung der Erdschwere bedeutet.

In diesem Zusammenhang läßt sich jetzt nachträglich der Nachweis führen, daß die beim Fluge auftretenden Druckschwankungen so geringfügig ausfallen, daß man sie unbedenklich vernachlässigen, mithin die Luft als eine Flüssigkeit im engeren Sinne ansehen kann (vgl. S. 4). Denn wählen wir beispielsweise ein Flugzeug, das mit der schon recht beträchtlichen Geschwindigkeit von 150 km pro Stunde fliegt, und setzen wir in (12,42) für ρ den Wert der Luftdichte bei normalem Atmosphärendruck ein, so berechnet sich gemäß (12,41) der maximale Druckunterschied, der in der resultierenden Luftströmung aufzutreten vermag, zu

$$\frac{1}{2} \cdot 0,0012928 \cdot \left(\frac{15000000}{3600} \right)^2 = 11222 [g \text{ cm}^{-1} \text{ sec}^{-2}],$$

d. h. zu wenig mehr als $1\frac{1}{2}\%$ des normalen Luftdrucks von 760 mm Quecksilbersäule oder $1013250 [g \text{ cm}^{-1} \text{ sec}^{-2}]$, und diese Differenz darf natürlich praktisch unberücksichtigt bleiben.

Uns nunmehr wieder allgemeineren Betrachtungen zuwendend, bemerken wir zunächst, daß jede stationäre Potentialströmung, genau wie jede beliebige stationäre Flüssigkeitsströmung, dann als gegeben anzusehen ist, wenn uns die Geschwindigkeitskomponenten v_x , v_y , v_z und der Druck p als Funktionen von x , y und z bekannt sind. Die vorhergehenden Überlegungen haben gezeigt, daß sich die *Eulerschen* Bewegungsgleichungen für stationäre Potentialströmungen zu der *Bernoullischen* Gleichung (12,3) bzw. (12,4) zusammenziehen lassen; diese Gleichung lehrt den Druck p zu berechnen, sobald v_x , v_y , v_z und damit gemäß (12,1) auch v gefunden sind. Zur Ermittlung der Geschwindigkeitskomponenten aber benötigen wir nach (10,4) der Kenntnis des Geschwindigkeitspotentials φ , und da uns von den allgemeinen Bewegungsgleichungen der idealen Flüssigkeit nur noch die Kontinuitätsgleichung (5,3) zur Verfügung steht, so müssen wir jetzt in diese Gleichung das Geschwindigkeitspotential φ einführen. Da nun z. B.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

gilt, so liefert dies die Beziehung

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (12,5)$$

die als die *Laplacesche Differentialgleichung* bezeichnet wird. *Letzten Endes läuft somit jedes Problem einer stationären Potentialströmung darauf hinaus, ein den speziellen Bedingungen des betr. Problems angepaßtes Integral der Laplaceschen Differentialgleichung (12,5) ausfindig zu machen.* Die Gesamtheit der Lösungen der Gleichung (12,5) stellt die Klasse der sogenannten *Potentialfunktionen* dar, deren Studium den Gegenstand der *Potentialtheorie* bildet.

§ 13. Ein aerodynamisches Randwertproblem.

Ein Tragflügel von gegebener Größe und bestimmter Gestalt bewege sich in bestimmter Richtung mit bekannter konstanter Geschwindigkeit durch die ursprünglich in Ruhe befindliche Luft hindurch, die wir als räumlich allseitig unbegrenzt ansehen wollen. Die damit verbundene Luftströmung setzen wir als wirbelfrei voraus und nehmen überdies an, daß mit unbegrenzt wachsender Entfernung vom Flugzeug die Strömungsgeschwindigkeit dem Grenzwert Null zustrebt. Denn selbstverständlich wird die Luftgeschwindigkeit um so kleinere Beträge aufweisen müssen, je weiter man sich vom Flugzeug entfernt, und sie wird unter jede angebbare Größe sinken, wenn man nur den Abstand vom Flugzeug groß genug wählt. Da sich der Tragflügel in Bewegung befindet, so wird er im Laufe der Zeit beständig neue Schichten der Luft passieren; infolgedessen wird der dabei erzeugte Strömungsvorgang, wenn wir zu seiner Beschreibung zunächst ein $\mathcal{E} H Z$ -System benutzen, in Bezug auf das die Luft sich ursprünglich im Ruhezustand befand, einen typisch nicht-stationären Charakter besitzen. Führen wir jedoch ein XYZ -System ein, das mit dem Tragflügel fest verbunden ist, so muß die Strömung in Bezug auf dieses System natürlich völlig stationär verlaufen. Insbesondere wird dann also das Geschwindigkeitspotential $\varphi(x, y, z)$ eine reine Ortsfunktion darstellen, und da die beiden genannten Koordinatensysteme auf Grund des Relativitätsprinzips der klassischen Mechanik als einander völlig äquivalent anzusehen sind, so besitzen auch hier die im vorhergehenden Paragraphen abgeleiteten Bewegungsgleichungen ungeändert Gültigkeit.

In Bezug auf das XYZ -System ist nun ursprünglich, d. h. bei Nichtvorhandensein der Tragfläche, die in Bezug auf das $\mathcal{E} H Z$ -System ruhende Luft in einer *Parallelströmung* begriffen, deren Richtung zur Richtung der Tragflügelbewegung entgegengesetzt ist, und deren Geschwindigkeitsbetrag mit dem Betrag V der Tragflügelgeschwindigkeit $\mathfrak{B}$ übereinstimmt. Machen wir daher die die Allgemeinheit nicht im mindesten beeinträchtigende Voraussetzung, daß die Richtung des Vektors $\mathfrak{B}$ mit der positiven Richtung

der X -Achse zusammenfällt, so gelten für die rechtwinkligen Komponenten $v_x^{(0)}$, $v_y^{(0)}$, $v_z^{(0)}$ der Luftgeschwindigkeit bei der ungestörten Parallelströmung in jedem beliebigen Raumpunkt $P(x, y, z)$ die Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} v_x^{(0)}(x, y, z) &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = -V, \\ v_y^{(0)}(x, y, z) &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} = 0, \\ v_z^{(0)}(x, y, z) &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (13,1)$$

aus denen sich als *Geschwindigkeitspotential der ungestörten Parallelströmung* sofort

$$\varphi_0(x, y, z) = -V \cdot x + c_0 \quad (13,11)$$

ergibt, unter c_0 eine willkürlich bleibende Konstante verstanden. Durch das Einbringen eines Tragflügels, der das von einer geschlossenen Fläche S berandete, den Koordinatenanfangspunkt als inneren Punkt enthaltende Raumgebiet T erfüllen möge, wird dann natürlich die zuvor vorhandene, durch das Geschwindigkeitspotential (13,11) charakterisierte Grundströmung in gewisser Weise modifiziert werden. Diesem Umstand wollen wir dadurch Rechnung tragen, daß wir für das Geschwindigkeitspotential $\varphi(x, y, z)$ der die Tragfläche S umfließenden Strömung den Ansatz

$$\varphi(x, y, z) = \varphi_0(x, y, z) + \varphi_1(x, y, z) \quad (13,2)$$

machen, wobei eben unter $\varphi_1(x, y, z)$ eine uns einstweilen noch nicht bekannte Ortsfunktion zu verstehen ist.

Selbstverständlich muß die Funktion $\varphi(x, y, z)$ im ganzen Außengebiet T' von S der *Laplaceschen* Gleichung (12,5) genügen, und überdies muß sie eine eindeutige Ortsfunktion sein, da ja T' ein einfach zusammenhängendes Raumgebiet darstellt (vgl. S. 38 u. 41). Entsprechendes gilt dann wegen (13,2) und (13,11) auch von $\varphi_1(x, y, z)$. Ferner sollte die durch die Tragfläche bedingte Modifikation der Grundströmung in unbegrenzter Entfernung von der Tragfläche verschwindend klein sein. Infolgedessen müssen sich, wenn wir

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (13,3)$$

setzen, für hinreichend große Werte von R die durch $\varphi(x, y, z)$ gelieferten Geschwindigkeitskomponenten v_x , v_y , v_z der den Tragflügel umfließenden Strömung beliebig wenig von den in (13,1) angegebenen Geschwindigkeits-

komponenten der Grundströmung unterscheiden. Es müssen also mit anderen Worten die drei Relationen

$$\lim_{R \rightarrow \infty} v_x = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -V,$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} v_y = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} v_z = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

bestehen, aus denen sich gemäß (13,2) für die Funktion $\varphi_1(x, y, z)$ die Grenzbedingungen

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = 0 \quad (13,31)$$

ergeben. Schließlich muß an der Berandung S des in Bezug auf das XYZ -System ruhenden Tragflügels gemäß (7,4) die Bedingung

$$v_x \cdot \cos(n, x) + v_y \cdot \cos(n, y) + v_z \cdot \cos(n, z) = 0$$

erfüllt sein, was wegen (10,4) für $\varphi(x, y, z)$ die Randbedingung

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dn} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dn} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dn} \right]_S = 0$$

oder kürzer geschrieben

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_S = 0$$

liefert. Hieraus folgt gemäß (13,2)

$$\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right]_S = - \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial n} \right]_S$$

und da wegen (13,1)

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \cdot \cos(n, x) + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \cdot \cos(n, y) + \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \cdot \cos(n, z) = -V \cdot \cos(n, x)$$

gilt, so ergibt sich für $\varphi_1(x, y, z)$ die Randbedingung

$$\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right]_S = V \cdot \cos(n, x). \quad (13,32)$$

Unser aerodynamisches Randwertproblem reduziert sich somit auf die Auffindung einer im Außengebiet T' von S eindeutigen Potentialfunktion $\varphi_1(x, y, z)$, die den in (13,31) und (13,32) formulierten Bedingungen genügt.

Um jetzt zunächst die Frage zur Entscheidung zu bringen, ob das soeben gekennzeichnete Problem eine einzige Lösung zuläßt oder nicht,

gehen wir von der Annahme aus, daß $\varphi_1^{(1)}(x, y, z)$ und $\varphi_1^{(2)}(x, y, z)$ zwei Lösungen dieses Problems seien. Dann stellt auch

$$\varphi_1^{(0)}(x, y, z) = \varphi_1^{(1)}(x, y, z) - \varphi_1^{(2)}(x, y, z) \quad (13,4)$$

eine in T' eindeutige Potentialfunktion dar, deren Normalableitung auf S wegen (13,32) identisch verschwinden muß. Nun gilt für jede Funktion $u(x, y, z)$, die in einem beschränkten Raumgebiet T_0 und auf dessen Berandung S_0 stetige partielle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung besitzt, auf Grund einer bekannten Integralformel von *Green*¹⁾ die Beziehung

$$\int_{(T_0)} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau + \int_{(T_0)} u \cdot \Delta u d\tau = - \int_{(S_0)} u \cdot \frac{\partial u}{\partial n} d\omega. \quad (13,41)$$

Wenden wir diese Relation auf die durch (13,4) definierte Potentialfunktion $\varphi_1^{(0)}(x, y, z)$ an, und verstehen wir dabei unter T_0 dasjenige beschränkte Raumgebiet, das einerseits von S , andererseits aber von einer um den Nullpunkt als Mittelpunkt geschlagenen Kugel K berandet wird, deren Radius R so groß gewählt ist, daß S ganz im Inneren des von K berandeten Kugelkörpers liegt, so erhalten wir²⁾

$$\int_{(T_0)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau = - \int_{(K)} \varphi_1^{(0)} \cdot \frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial n} d\omega, \quad (13,42)$$

da ja $\Delta \varphi_1^{(0)}$ in T_0 sowie $\frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial n}$ auf S verschwindet. Da aber³⁾

$$\int_{(K)} \varphi_1^{(0)} \cdot \frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial n} d\omega = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^\pi \varphi_1^{(0)} \cdot \left(R^2 \cdot \frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial n} \right) \cdot \sin \vartheta d\vartheta \quad (13,43)$$

sowie $\lim_{R \rightarrow \infty} T_0 = T'$ wird, so liefert (13,42) für $R \rightarrow \infty$

$$\int_{(T')} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau = 0, \quad (13,44)$$

falls (13,31) zu

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(R^2 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(R^2 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(R^2 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right) = 0 \quad (13,5)$$

¹⁾ Vgl. z. B. W. Sternberg, Potentialtheorie I (Sammlung Götschen Nr. 901), § 13.

²⁾ Man beachte, daß unter den hier getroffenen Voraussetzungen die rechte Seite von (13,41) zunächst durch den Ausdruck

$$- \int_{(S)} \varphi_1^{(0)} \cdot \frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial n} d\omega - \int_{(K)} \varphi_1^{(0)} \cdot \frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial n} d\omega$$

zu ersetzen ist, da ja jetzt $S_0 = S + K$ gilt.

³⁾ Vgl. z. B. Serret-Scheffers, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung Bd. II, Nr. 601.

verschärft wird. Da der in (13,44) auftretende Integrand eine wesentlich positive Funktion darstellt, so kann diese Relation nur dann bestehen, wenn in ganz T'

$$\frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial z} = 0$$

gilt, woraus sofort $\varphi_1^{(0)}(x, y, z) = \text{const.}$, mithin gemäß (13,4)

$$\varphi_1^{(1)}(x, y, z) = \varphi_1^{(2)}(x, y, z) + \text{const.}$$

folgt. Wenn also unser Problem mit den Bedingungen (13,32) und (13,5) überhaupt lösbar ist, so kann es, von einer willkürlich bleibenden additiven Konstanten abgesehen, nur eine einzige Lösung besitzen.

Mit (13,5) wird die gesuchte Funktion $\varphi_1(x, y, z)$ zu einer im Unendlichfernen regulären¹⁾ Potentialfunktion, und unser Problem stellt einen einfachen Spezialfall der sogenannten zweiten Randwertaufgabe der Potentialtheorie dar. Wie in der Potentialtheorie bewiesen²⁾ wird, hat diese Aufgabe dann und nur dann eine Lösung, wenn die Bedingung

$$\int_{(S)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} d\omega = 0$$

erfüllt ist. Wegen (13,32) wird nun tatsächlich

$$\int_{(S)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} d\omega = V \cdot \int_{(S)} \cos(n, x) d\omega = 0,$$

so daß die Existenzfrage als erledigt anzusehen ist.

Der zuvor erkannte Umstand, daß sich das von uns ins Auge gefaßte aerodynamische Randwertproblem nur bis auf eine willkürlich bleibende additive Konstante lösen läßt, ist als durchaus belanglos anzusehen, da ja unser Interesse letzten Endes nicht dem Geschwindigkeitspotential selbst, sondern lediglich den aus ihm durch Differentiation abzuleitenden Geschwindigkeitskomponenten gilt.

§ 14. Die Strömung um einen Kugelkörper.

Die Tatsache, daß das im vorhergehenden Paragraphen betrachtete Strömungsproblem nur eine einzige Lösung besitzt, ist von hervorragender praktischer Bedeutung. Denn wenn man auf irgendwelche Weise, z. B. durch geschicktes Probieren, eine Funktion $\varphi_1(x, y, z)$ gefunden hat, die im Außengebiet T' einer gewissen beschränkten geschlossenen Fläche S der Laplaceschen Differentialgleichung genügt, und die zugleich auf der Fläche S die Bedingung (13,32) sowie im Unendlichfernen die Bedingung (13,5) erfüllt, so ist man sicher, in der alsdann durch (13,2) gegebenen

¹⁾ Vgl. W. Sternberg, I. c. § 9.

²⁾ Vgl. W. Sternberg, Potentialtheorie II (Sammlung Göschen Nr. 944), § 32.

Funktion $\varphi(x, y, z)$ das Geschwindigkeitspotential derjenigen Flüssigkeitsströmung vor sich zu haben, die einen das Innengebiet T jener Fläche S erfüllenden festen Körper umfließt.

Ein besonders einfaches Beispiel bietet ein fester Kugelkörper, der von einer um den Ursprung des XYZ -Systems als Mittelpunkt mit dem Radius a geschlagenen Kugel K berandet wird. Denn wie man sich sehr leicht überzeugt, ist in diesem Falle die den eben genannten Bedingungen genügende Funktion $\varphi_1(x, y, z)$ mit Benutzung von (13,3) durch

$$\varphi_1(x, y, z) = -\frac{a^3 \cdot V}{2} \cdot \frac{x}{R^3} \quad (14,1)$$

gegeben. Zunächst nämlich ergibt eine einfache Rechnung das Bestehen der Relation

$$\Delta \varphi_1 = -\frac{a^3 V}{2} \cdot \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{x}{R^3} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{x}{R^3} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{x}{R^3} \right) \right\} = 0,$$

womit die Funktion (14,1) als eine Lösung der *Laplaceschen* Differentialgleichung erkannt ist. Ferner wird

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = -\frac{a^3 V}{2 R^3} \cdot \left(1 - 3 \cdot \frac{x^2}{R^2} \right), \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{3 a^3 V}{2 R^3} \cdot \frac{x \cdot y}{R^2}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} = \frac{3 a^3 V}{2 R^3} \cdot \frac{x \cdot z}{R^2},$$

woraus wegen

$$\left| \frac{x}{R} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{y}{R} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{z}{R} \right| \leq 1$$

die Richtigkeit der Relationen (13,5) folgt. Um schließlich auch die Randbedingung (13,32) zu verifizieren, haben wir zu beachten, daß hier

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial R} \quad \text{sowie} \quad \cos(n, x) = -\cos(R, x)$$

zu setzen ist. Gemäß (13,32) müßte demnach

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial R} \right)_{R=a} = V \cdot \cos(R, x) \quad (14,11)$$

sein; da aber wegen $\cos(R, x) = \frac{x}{R}$ gemäß (14,1)

$$\varphi_1(x, y, z) = -\frac{a^3 V}{2} \cdot \frac{\cos(R, x)}{R^2},$$

mithin

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial R} = a^3 V \cdot \frac{\cos(R, x)}{R^3}$$

wird, so ist (14,11) tatsächlich erfüllt. Infolgedessen liefert (14,1) in Verbindung mit (13,2) und (13,11) als *Geschwindigkeitspotential der Strömung um den Kugelkörper* die Funktion

$$\varphi(x, y, z) = -V \cdot x \cdot \left(1 + \frac{a^3}{2R^3}\right), \quad (14,2)$$

wobei wir die in (13,11) angeschriebene additive Konstante als belanglos fortgelassen haben.

Um die Komponenten der Flüssigkeitgeschwindigkeit $\mathbf{v}(x, y, z)$ zu berechnen, haben wir (14,2) nach x , y und z zu differenzieren. Dies liefert die Relationen

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -V \cdot \left\{1 + \frac{a^3}{2R^3} \cdot \left(1 - \frac{3x^2}{R^2}\right)\right\}, \\ v_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{3a^3 V x y}{2R^5}, \\ v_z &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{3a^3 V x z}{2R^5}, \end{aligned} \right\} \quad (14,21)$$

aus denen sich für den Betrag v des Geschwindigkeitsvektors $\mathbf{v}$

$$v^2 = V^2 \cdot \left\{1 + \frac{a^3}{R^3} \cdot \left[1 + \frac{a^3}{4R^3} - \frac{3x^2}{R^2} \cdot \left(1 - \frac{a^3}{4R^3}\right)\right]\right\} \quad (14,22)$$

ergibt. Und da die Strömung stationären Charakter besitzt, so ist der Druck p , falls die Wirkung der Erdschwere, die hier als einzige äußere Kraft in Betracht käme, vernachlässigt wird, mit Hilfe der *Bernoullischen* Gleichung (12,4) zu berechnen, was mit Benutzung von (14,22) die Beziehung

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho V^2 \cdot \left\{1 + \frac{a^3}{R^3} \cdot \left[1 + \frac{a^3}{4R^3} - \frac{3x^2}{R^2} \cdot \left(1 - \frac{a^3}{4R^3}\right)\right]\right\} \quad (14,23)$$

liefert.

Wir stellen uns nunmehr die Aufgabe, diejenige Kraft $\mathfrak{P}$ zu ermitteln, die seitens der strömenden Flüssigkeit auf den in ihr ruhenden Kugelkörper ausgeübt wird. Zu diesem Zweck haben wir offenbar die gesamte Flächenkraft zu berechnen, die durch die den Kugelkörper berandende Kugel K auf das Innere des Kugelkörpers übertragen wird, und da diese Flächenkraft durch das über die ganze Kugel K zu erstreckende Flächenintegral des als Vektor aufzufassenden Flüssigkeitsdrucks $\mathbf{p}$ gegeben ist, so haben wir

$$\mathfrak{P} = \int_{(K)} \mathbf{p} d\omega \quad (14,3)$$

zu setzen. Wollen wir von dieser Vektorgleichung zur Komponentendarstellung übergehen, so haben wir dabei zu beachten, daß der Vektor $\mathbf{p}$

auf der Kugel K senkrecht steht, mithin auf K stets radial zum Kugelmittelpunkt hin gerichtet ist. Infolgedessen ist

$$p_x = p \cdot \cos(n, x) = -p \cdot \cos(R, x),$$

$$p_y = p \cdot \cos(n, y) = -p \cdot \cos(R, y),$$

$$p_z = p \cdot \cos(n, z) = -p \cdot \cos(R, z)$$

zu setzen, so daß wir, wenn wir die rechtwinkligen Komponenten des Vektors $\mathfrak{P}$ mit P_x , P_y und P_z bezeichnen, die Beziehung (14,3) in die drei Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} P_x &= - \int_{(K)} p \cdot \cos(R, x) d\omega, \\ P_y &= - \int_{(K)} p \cdot \cos(R, y) d\omega, \\ P_z &= - \int_{(K)} p \cdot \cos(R, z) d\omega \end{aligned} \right\} \quad (14,31)$$

aufspalten können. Den hierin für p einzusetzenden Wert, d. h. also den auf der Kugel K herrschenden Flüssigkeitsdruck, erhalten wir aus (14,23), indem wir darin $R = a$ eintragen; dies liefert

$$p = p_0 - \frac{9\rho V^2}{8a^2} (a^2 - x^2), \quad (14,32)$$

so daß die Gleichungen (14,31) in das Gleichungssystem

$$P_x = - \int_{(K)} \left\{ p_0 - \frac{9\rho V^2}{8a^2} (a^2 - x^2) \right\} \cos(R, x) d\omega,$$

$$P_y = - \int_{(K)} \left\{ p_0 - \frac{9\rho V^2}{8a^2} (a^2 - x^2) \right\} \cos(R, y) d\omega,$$

$$P_z = - \int_{(K)} \left\{ p_0 - \frac{9\rho V^2}{8a^2} (a^2 - x^2) \right\} \cos(R, z) d\omega$$

übergehen. Führen wir dann durch die Substitutionen

$$x = a \sin \vartheta \cos \Theta, \quad y = a \sin \vartheta \sin \Theta, \quad z = a \cos \vartheta$$

räumliche Polarkoordinaten ein, so gilt auf K

$$\cos(R, x) = \frac{x}{a} = \sin \vartheta \cos \Theta,$$

$$\cos(R, y) = \frac{y}{a} = \sin \vartheta \sin \Theta,$$

$$\cos(R, z) = \frac{z}{a} = \cos \vartheta,$$

so daß

$$\begin{aligned}
 P_x &= -a^2 \left(p_0 - \frac{9\rho V^2}{8} \right) \cdot \int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^\pi \sin^2 \vartheta \cos \Theta d\vartheta \\
 &\quad - \frac{9\rho a^2 V^2}{8} \cdot \int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^\pi \sin^4 \vartheta \cos^3 \Theta d\vartheta, \\
 P_y &= -a^2 \left(p_0 - \frac{9\rho V^2}{8} \right) \cdot \int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^\pi \sin^2 \vartheta \sin \Theta d\vartheta \\
 &\quad - \frac{9\rho a^2 V^2}{8} \cdot \int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^\pi \sin^4 \vartheta \cos^2 \Theta \sin \Theta d\vartheta, \\
 P_z &= -a^2 \left(p_0 - \frac{9\rho V^2}{8} \right) \cdot \int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^\pi \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta \\
 &\quad - \frac{9\rho a^2 V^2}{8} \cdot \int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^\pi \sin^3 \vartheta \cos \vartheta \cos^2 \Theta d\vartheta
 \end{aligned}$$

wird. Ausführung der Integrationen liefert

$$P_x = P_y = P_z = 0, \quad (14,4)$$

was sich in Worten dahin formulieren läßt, daß ein in eine strömende ideale Flüssigkeit eingetauchter fester Kugelkörper durch die ihn umfließende Strömung überhaupt keine Kraftwirkung erfährt.

§ 15. Das d'Alembertsche Paradoxon.

Das soeben erhaltene Ergebnis steht augenscheinlich im krassesten Widerspruch zu der Erfahrungstatsache, daß jeder durch eine Flüssigkeit sich hindurchbewegende Körper einen gewissen Widerstand in der Richtung seiner Bewegung erleidet. Denn wie bereits zu Beginn von § 13 hervorgehoben wurde, ist der zuvor betrachtete Strömungsvorgang um einen ruhenden Kugelkörper in mechanischer Hinsicht als völlig äquivalent einer Translationsbewegung des Kugelkörpers durch eine ursprünglich in Ruhe befindliche Flüssigkeit anzusehen, und so kann insbesondere die erste der in (14,4) steckenden drei Gleichungen dahin gedeutet werden, daß ein sich bewegendes Kugelkörper den Widerstand Null erfährt. Dieses sonderbare Ergebnis stellt aber nur einen Spezialfall des folgenden allgemeineren Theorems dar, das in der hydrodynamischen Literatur als das *d'Alembert-*

sche Paradoxon bezeichnet wird: Jeder beliebig gestaltete feste Körper, der in einer räumlich unbegrenzten idealen Flüssigkeit eine Translationsbewegung vollführt, erfährt in seiner Bewegungsrichtung keinen Widerstand.

Zum Beweis dieses Satzes knüpfen wir unmittelbar an die in § 13 gemachten Darlegungen an. Indem wir für das Geschwindigkeitspotential $\varphi(x, y, z)$ den Ansatz (13,2) mit Berücksichtigung von (13,11) benutzen, erhalten wir für die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit die Ausdrücke

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -V + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x},$$

$$v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y},$$

$$v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z},$$

so daß

$$v^2 = \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - V \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2$$

wird. Für den Flüssigkeitsdruck p liefert alsdann die Bernoullische Gleichung (12,4) den Wert

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \varrho V^2 - \frac{1}{2} \varrho \cdot \left[\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right] + \varrho V \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x},$$

womit der Widerstand P_x in der Bewegungsrichtung die Form

$$\begin{aligned} P_x &= \int_{(S)} p \cdot \cos(n, x) d\omega = (p_0 - \frac{1}{2} \varrho V^2) \cdot \int_{(S)} \cos(n, x) d\omega \\ &\quad - \frac{1}{2} \varrho \cdot \int_{(S)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} \cos(n, x) d\omega \\ &\quad + \varrho \cdot V \cdot \int_{(S)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cdot \cos(n, x) d\omega \end{aligned}$$

oder unter Beachtung von (13,32) die Form

$$\left. \begin{aligned} P_x &= -\frac{1}{2} \varrho \cdot \int_{(S)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} \cos(n, x) d\omega \\ &\quad + \varrho \cdot \int_{(S)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} d\omega \end{aligned} \right\} \quad (15,1)$$

annimmt, da ja

$$\int_{(S)} \cos(n, x) d\omega = 0$$

gilt. Nun stellt $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$ als partielle Ableitung der im Unendlichfernen regulären Potentialfunktion $\varphi_1(x, y, z)$ eine im Unendlichfernen ebenfalls reguläre Potentialfunktion dar¹⁾, und da für zwei derartige Potentialfunktionen $u(x, y, z)$ und $v(x, y, z)$ die Beziehung²⁾

$$\int_{(T')} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} \right\} d\tau = - \int_{(S)} u \cdot \frac{\partial v}{\partial n} d\omega$$

besteht, so kann unter Beachtung der Tatsache, daß in unserem Falle die positive Normalenrichtung in das Innere des von der Fläche S berandeten Innengebiets T weist, während bei der vorstehenden Gleichung die positive Normale als in das Innere des Außengebiets T' von S gerichtet vorausgesetzt wird,

$$\int_{(S)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} d\omega = \int_{(T')} \left\{ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right\} d\tau$$

oder

$$\int_{(S)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} d\omega = \frac{1}{2} \int_{(T')} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau \quad (15,2)$$

gesetzt werden. Schlagen wir jetzt um den Ursprung als Mittelpunkt eine Kugel K mit so großem Radius R , daß die geschlossene Fläche S ganz im Inneren des von K berandeten Kugelkörpers verbleibt, und bezeichnen wir das einerseits von K , andererseits von S berandete (beschränkte) Raumgebiet mit T_1 , so können wir auf Grund des *Gaußschen* Integralsatzes, indem wir bezüglich des Vorzeichens die soeben über die positive Normalenrichtung auf S gemachte Bemerkung beachten, die Beziehung

$$\begin{aligned} & \int_{(T_1)} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau \\ &= \int_{(S)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} \cos(n, x) d\omega \\ & \quad - \int_{(K)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} \cos(n, x) d\omega \end{aligned} \quad (15,3)$$

¹⁾ Vgl. W. Sternberg, I. c. I, § 14.

²⁾ Vgl. W. Sternberg, I. c. I, § 13.

anschreiben. Da aber¹⁾

$$\begin{aligned} & \int_{(K)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} \cos(n, x) d\omega \\ &= \int_0^{2\pi} d\Theta \cdot \int_0^\pi \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} \cos(n, x) R^2 \sin \vartheta d\vartheta \end{aligned}$$

gilt, so wird wegen (13,5)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{(K)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} \cos(n, x) d\omega = 0,$$

mithin gemäß (15,3)

$$\begin{aligned} & \int_{(T')} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{(T_1)} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau \\ &= \int_{(S)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} \cos(n, x) d\omega, \end{aligned}$$

so daß aus (15,2)

$$\int_{(S)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} d\omega = \frac{1}{2} \cdot \int_{(S)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} \cos(n, x) d\omega$$

und damit schließlich aus (15,1)

$$P_x = 0$$

folgt, womit das *d'Alembertsche* Paradoxon bewiesen ist.

§ 16. Die unendlich breite Tragfläche und der Begriff der zweidimensionalen Flüssigkeitsbewegung.

Auf Grund des *d'Alembertschen* Paradoxons muß es offenbar zunächst als völlig unmöglich erscheinen, die durch die Fortbewegung eines Flugzeugs durch die Luft geweckten Luftkräfte, von denen wir in der Einleitung gesprochen haben, mit Benutzung der bisher von uns entwickelten hydrodynamischen Hilfsmittel zu erklären. Eine von Null verschiedene Kraftwirkung auf einen in eine strömende Flüssigkeit eingetauchten festen Körper wird sicherlich nur dann resultieren, wenn an der Oberfläche dieses

¹⁾ Vgl. Fußnote 3) auf S. 49.

Körpers eine unsymmetrische Druckverteilung hervorgerufen wird — eine Bedingung, die aber beispielsweise, wie man unmittelbar aus (14,32) ersieht, für den Fall eines kugelförmig berandeten Körpers keinesfalls erfüllt ist. Da nun die in (14,32) in Erscheinung tretende Symmetrie auf die symmetrische Struktur des durch (14,22) beschriebenen Geschwindigkeitsfeldes zurückzuführen ist, so wird man von Null verschiedene Kraftwirkungen lediglich dann erwarten dürfen, falls es auf irgendwelche Weise gelingen würde, jenes Geschwindigkeitsfeld zu entsymmetrisieren. Dies wäre nun ohne weiteres möglich, wenn man der bisher betrachteten Flüssigkeitsbewegung eine zusätzliche Strömung überlagern dürfte, bei der die einzelnen Flüssigkeitsteilchen geschlossene, den Kugelkörper umschlingende Bahnen beschreiben würden¹⁾. Doch solches Vorgehen verbietet sich zum ersten deshalb, weil die einmal gewonnene Lösung unseres Strömungsproblems, wie in § 13 bewiesen wurde, die einzige Lösung darstellt, mithin keinerlei Modifikation mehr zugänglich ist, sowie zum zweiten deshalb, weil eine Strömung mit geschlossenen Stromlinien in dem einfach zusammenhängenden Außengebiet des Kugelkörpers in § 11 als durchaus unmöglich erkannt wurde. So sehen wir uns also jetzt zu dem Versuch veranlaßt, das Strömungsgebiet durch irgendeinen Kunstgriff zweifach zusammenhängend zu gestalten, da alsdann ja die Ausbildung geschlossener Stromlinien als prinzipiell zulässig erwiesen ist.

Das Gelingen dieses Versuchs wird nun ganz wesentlich durch die Erfahrungstatsache erleichtert, daß alle praktisch brauchbaren Flugzeugtragflügel eine im Verhältnis zu ihrer Tiefe sehr erhebliche Spannweite oder Breite besitzen müssen. Dieser Umstand legt nämlich den Gedanken nahe, unseren Untersuchungen als erste Annäherung an die wirklich vorliegenden Verhältnisse eine *unendlich breite Tragfläche* mit überall gleichem Querschnitt zugrunde zu legen, wodurch dann sofort ein zweifach zusammenhängendes Strömungsgebiet erhalten wird. Denn jede die Tragfläche umschlingende geschlossene Kurve kann offensichtlich nicht mehr im Inneren des Strömungsgebiets reduziert werden, und wenn man sich die auf S. 39 befindlichen Figuren 4 und 5 unbegrenzt vergrößert denkt, so wird man sich sehr leicht veranschaulichen können, daß bereits durch Einführung eines einzigen Querschnitts ein einfach zusammenhängendes Raumgebiet entstehen muß.

Die Betrachtung einer unendlich breiten Tragfläche bringt nun aber eine ganz wesentliche Vereinfachung mit sich. Denn wenn ein beiderseits sich unbegrenzt ausdehnender Tragflügel in horizontaler Richtung geradlinig-gleichförmig fortbewegt wird, so muß sich offenbar aus Symmetriegründen in allen vertikal verlaufenden Ebenen genau derselbe Strö-

¹⁾ Denn betrachten wir z. B. eine kreisförmige Stromlinie, die den Kugelkörper umschlingt, so sind in je zwei einander diametral gegenüberliegenden Punkten dieser Stromlinie die Richtungen der Strömungsgeschwindigkeit zueinander entgegengesetzt, wodurch dann die in Rede stehende Entsymmetrisierung bewirkt werden könnte.

mungszustand ausbilden. Wählen wir also die XY -Ebene unseres mit der Tragfläche fest verbundenen Bezugssystems vertikal, so werden die Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_y sowie der Druck p lediglich von x und y , nicht aber auch von z abhängig sein, und die Geschwindigkeitskomponente v_z muß überall verschwinden. Infolgedessen können wir uns bei der Untersuchung der Strömung um einen unendlich breiten Tragflügel auf die Beschreibung der in der XY -Ebene sich abspielenden Vorgänge beschränken, weshalb man hier von einer *ebenen* oder *zweidimensionalen Flüssigkeitsbewegung* spricht. Die Tragfläche erscheint dann in dieser Ebene als ein gewisses, von einer geschlossenen Kurve C berandetes Gebiet B , dessen Gestalt dem Tragflügelquerschnitt entspricht, und das etwa als Repräsentant eines Tragflächenstücks von der Breite (Spannweite) 1 aufgefaßt werden kann¹⁾.

In der Flugtechnik wird der Querschnitt einer Tragfläche als *Profil*, seine Berandung als *Kontur* bezeichnet. Das Aussehen eines normalen Profils ist aus Fig. 6 zu entnehmen. Es ist nach vorne — im Sinne der Flugrichtung gesprochen — in deutlich erkennbarer Weise abgerundet, während es am hinteren Ende in eine scharfe Ecke mit von Null verschiedener Öffnung²⁾ ausläuft, die unter Umständen auch in eine Spitze mit verschwindender

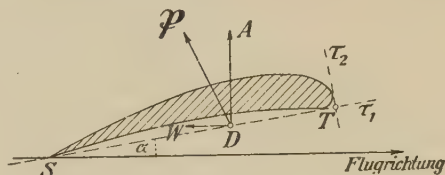


Fig. 6.

Öffnung ausarten kann. Dem entspricht die Tatsache, daß die Tragfläche stets eine scharfe Hinterkante besitzt — ein Umstand, der sich später als prinzipiell bedeutsam erweisen wird. Zieht man die durch den Punkt S hindurchgelegte Tangente τ_1 an den unteren Teil der Profilkontur, ferner die zu τ_1 senkrechte Tangente τ_2 an den vorderen Teil der Profilkontur, und bezeichnet man den Schnittpunkt dieser beiden Tangenten mit T , so stellt die Strecke ST die sogenannte *Profillehne* dar, die als Maß der Flügeltiefe dienen kann. Sie schließt mit der Richtung der Flugbahn einen Winkel α ein, der der *Anstellwinkel* des Flügels heißt. Den Angriffspunkt der Luftkraft $\mathfrak{P}$, die auf das durch das Profil repräsentierte Tragflächenstück von der Breite 1 einwirkt, denkt man sich in einen Punkt D der Profillehne verlegt, der als *Druckpunkt* bezeichnet wird. Die Lage der beiden bereits in der Einleitung eingeführten Komponenten von $\mathfrak{P}$, d. h. also des *Widerstands* W und des *Auftriebs* A , ist dabei der Vollständigkeit halber ebenfalls in die Figur eingezeichnet worden.

¹⁾ Diese Auffassung wird durch den Umstand bedingt, daß durch den Tragflügel Flächenkräfte übertragen werden, mithin die Randkurve C lediglich als eine schematische Darstellung eines Stücks der Oberfläche des Tragflügels anzusehen ist.

²⁾ Unter der *Öffnung* der Profilecke ist die Größe desjenigen Winkels zu verstehen, den die beiden Grenzlagen der Kurventangenten miteinander einschließen, wenn man sich sowohl auf dem oberen als auch auf dem unteren Teil der Kontur C unbegrenzt dem Eckpunkt S nähert.

§ 17. Ebene Potentialströmungen.

Um die Bewegungsgleichungen für ebene Strömungen einer idealen Flüssigkeit zu erhalten, brauchen wir bloß in den für räumliche Strömungen gültigen Gleichungen die darin auftretenden partiellen Ableitungen nach z sowie die Geschwindigkeitskomponente v_z gleich Null zu setzen. So liefert (5,3) die *Kontinuitätsgleichung*

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad (17,1)$$

während die *Eulerschen Bewegungsgleichungen* für den Fall einer ebenen, unter Einwirkung konservativer äußerer Kräfte vor sich gehenden stationären Strömung gemäß (7,3) die Form

$$\left. \begin{aligned} v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} &= - \frac{\partial}{\partial x} \left(U + \frac{p}{\rho} \right), \\ v_x \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} &= - \frac{\partial}{\partial y} \left(U + \frac{p}{\rho} \right) \end{aligned} \right\} \quad (17,2)$$

annehmen. Die Bedingungen (10,31) für *wirbelfreie Bewegungen* reduzieren sich auf die Gleichung

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad (17,3)$$

aus der die Existenz eines *Geschwindigkeitspotentials* $\varphi(x, y)$ folgt, derart, daß

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (17,31)$$

gesetzt werden kann. Für *ebene Potentialströmungen* geht daher die Kontinuitätsgleichung (17,1) in die Relation

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (17,4)$$

über, die auch hier wieder als *Laplacesche Differentialgleichung* bezeichnet wird. Die Gleichungen (12,3) und (12,4) bleiben formal ungeändert, so daß uns insbesondere zur Berechnung des Drucks bei einer ebenen stationären, ohne Einwirkung äußerer Kräfte erfolgenden Potentialströmung die *Bernoullische Gleichung* in der Form

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (17,5)$$

zur Verfügung steht, wobei

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 \quad (17,51)$$

zu setzen ist.

Wenden wir das zweidimensionale Analogon des *Stokesschen* Integralsatzes auf ein von einer beschränkten geschlossenen Kurve C_0 berandetes Gebiet B_0 an, das ganz im Inneren des ebenen Strömungsgebiets gelegen ist, so erhalten wir in Analogie zu (5,4) die Beziehung¹⁾

$$\int_{(B_0)} \left\{ \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right\} d\sigma = - \int_{(C_0)} (v_x dx + v_y dy). \quad (17,6)$$

Setzen wir nun für den Fall einer ebenen Potentialströmung unter Beachtung von (17,31)

$$J_{C_0} = \int_{(C_0)} (v_x dx + v_y dy) = \int_{(C_0)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} \right) ds = \int_{(C_0)} \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds, \quad (17,61)$$

so wird gemäß (17,6) wegen (17,3)

$$J_{C_0} = 0,$$

womit das Verschwinden der durch (17,61) definierten *Zirkulation* längs C_0 bewiesen ist. Hieraus ergibt sich dann sofort die Eindeutigkeit des Geschwindigkeitspotentials in jedem einfach zusammenhängenden ebenen Strömungsgebiet²⁾. Liegt aber ein zweifach zusammenhängendes Strömungsgebiet vor, so kann die Zirkulation längs einer in diesem Gebiet nicht reduzierbaren Kurve sehr wohl einen von Null verschiedenen Wert besitzen³⁾, wobei jedoch dieser Wert für sämtliche Kurven der gekennzeichneten Art der gleiche sein muß. Sind nämlich C_1 und C_2 zwei beliebige nicht reduzierbare Kurven, und ist c_0 ein Kurvenstück, das ganz in dem von C_1 und C_2 berandeten Gebiet B^* verläuft, und das den auf C_1 gelegenen Punkt P_1 mit dem auf C_2 gelegenen Punkt P_2 verbindet, so stellt

$$\begin{aligned} \int_{(-C_1)} (v_x dx + v_y dy) + \int_{(c_0)} (v_x dx + v_y dy) + \int_{(C_2)} (v_x dx + v_y dy) \\ + \int_{(-c_0)} (v_x dx + v_y dy) = \int_{(C_0)} (v_x dx + v_y dy) \end{aligned}$$

ein längs einer geschlossenen, aus C_1 und C_2 sowie dem doppelt zu durchlaufenden Kurvenstück c_0 bestehenden Kurve C_0 erstrecktes Kurven-

¹⁾ Man beachte, daß in ganz B_0 die Beziehungen $\cos(n, x) = \cos(n, y) = 0$ und $\cos(n, z) = 1$ bestehen, da ja die positive Normalenrichtung n des in der XY -Ebene gelegenen Gebiets B_0 mit der positiven Richtung der Z -Achse übereinstimmt.

²⁾ Hierfür und für das Folgende ziehe man die in § 11 gemachten Ausführungen zum Vergleich heran!

³⁾ Denn das von einer nicht reduzierbaren geschlossenen Kurve C_0 berandete ebene Gebiet B_0 enthält ja sicherlich solche Teile, die nicht zum flüssigkeitsgefüllten Gebiet gehören, so daß alsdann die Einführung von (17,3) in (17,6) illusorisch wird.

integral dar, wobei in dem umlaufenen Gebiet B_0 die Beziehung (17,3) überall erfüllt ist. Anwendung von (17,6) liefert daher

$$-\int_{(C_1)} (v_x dx + v_y dy) + \int_{(C_0)} (v_x dx + v_y dy) \\ + \int_{(C_2)} (v_x dx + v_y dy) - \int_{(C_0)} (v_x dx + v_y dy) = 0$$

oder

$$\int_{(C_1)} (v_x dx + v_y dy) = \int_{(C_2)} (v_x dx + v_y dy),$$

womit die Richtigkeit unserer Behauptung bewiesen ist. Besitzt die hierdurch als für jede in einem zweifach zusammenhängenden ebenen Gebiet erfolgende Potentialströmung als charakteristisch erkannte *Zirkulationskonstante*

$$J = \int_{\mathfrak{K}(C_0)} \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = \int_{(C_0)} v_s ds = \int_{(C_0)} (v_x dx + v_y dy) \quad (17,62)$$

einen von Null verschiedenen Wert, so ist das Geschwindigkeitspotential dieser Strömung eine unendlich vieldeutige Funktion, deren verschiedene Werte an einer bestimmten Stelle des Strömungsgebiets sich um ganzzahlige Vielfache der Zirkulationskonstanten (17,62) voneinander unterscheiden.

Während die in (5,61) eingeführte Zirkulation J_L längs einer geschlossenen Raumkurve L definitionsgemäß eine stets positive Größe sein sollte, müssen wir bei ebenen Strömungen mit der Unterscheidung zwischen positiven und negativen Zirkulationen (17,62) rechnen. Denn die bezüglich des Vorzeichens von (5,61) getroffene Festsetzung war ja lediglich deshalb möglich, weil der positive Umlaufssinn längs einer Raumkurve L willkürlich gewählt werden kann; bei ebenen geschlossenen Kurven hingegen ist die positive Umlaufsrichtung bereits völlig eindeutig festgelegt, so daß (17,62) gegebenenfalls sehr wohl auch negative Werte anzunehmen vermag.

Die *Stromlinien* einer zweidimensionalen stationären Flüssigkeitsbewegung können wir uns als ebene Kurvenschar durch eine Gleichung von der Form

$$\psi(x, y) = \text{const.} \quad (17,7)$$

dargestellt denken. Die hierin auftretende Funktion $\psi(x, y)$, die überall stetige, an keiner Stelle zugleich verschwindende partielle Ableitungen erster Ordnung¹⁾ besitzen soll, wird als die *Stromfunktion* der betr. Strömung bezeichnet. Liegt der Punkt $P(x, y)$ auf einer der durch (17,7) gegebenen

¹⁾ Diese Bedingung ist bekanntlich hinreichend dafür, daß jede der Kurven (17,7) in jedem ihrer Punkte eine eindeutig bestimmte Tangente besitzt, was selbstverständlich bei einer Stromlinie stets der Fall sein muß.

Kurven, so lautet die Gleichung der durch ihn hindurchgehenden Kurventangente

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot (\xi - x) + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot (\eta - y) = 0, \quad (17,71)$$

falls ξ und η die Koordinaten eines veränderlichen Punktes der Tangente bedeuten. Da aber die Richtung dieser Tangente definitionsgemäß mit der Richtung der in $P(x, y)$ herrschenden Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ übereinstimmt, so muß ihre Gleichung andererseits durch

$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = \frac{v_y}{v_x}$$

oder

$$-v_y \cdot (\xi - x) + v_x \cdot (\eta - y) = 0 \quad (17,72)$$

gegeben sein. In entsprechender Weise ergibt sich für die durch $P(x, y)$ hindurchgehende Kurvennormale einerseits

$$-\frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot (\xi - x) + \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot (\eta - y) = 0, \quad (17,73)$$

andererseits

$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = -\frac{v_x}{v_y}$$

oder

$$v_x \cdot (\xi - x) + v_y \cdot (\eta - y) = 0. \quad (17,74)$$

Bei einer ebenen Potentialströmung gehen (17,72) und (17,74) wegen (17,31) in

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot (\xi - x) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot (\eta - y) = 0 \quad (17,75)$$

bezw.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot (\xi - x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot (\eta - y) = 0 \quad (17,76)$$

über, woraus durch Vergleich mit (17,73) bzw. (17,71) die bemerkenswerte Tatsache folgt, daß, wenn wir die durch die Gleichung

$$\varphi(x, y) = \text{const.} \quad (17,8)$$

dargestellte Kurvenschar ins Auge fassen, die Tangenten bezw. Normalen der Schar (17,7) mit den Normalen bezw. Tangenten der Schar (17,8) zusammenfallen. *Daher hängen das Geschwindigkeitspotential $\varphi(x, y)$ und die Stromfunktion $\psi(x, y)$ einer zweidimensionalen Potentialströmung miteinander durch die beiden Gleichungen*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (17,9)$$

zusammen, die als die *Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen* bekannt sind. Die durch (17,8) analytisch beschriebenen Kurven heißen *Aequipotentia-* oder *Niveaulinien*, weil auf jeder von ihnen das Geschwindigkeitspotential $\varphi(x, y)$ einen festen Wert besitzt. Infolgedessen läßt sich die soeben gewonnene Erkenntnis auch dahin zum Ausdruck bringen, daß die *Stromlinien* und die *Niveaulinien* einer ebenen Potentialströmung zwei sich orthogonal durchsetzende Kurvenscharen bilden.

Da wegen (17,9) die Stromfunktion $\psi(x, y)$ genau wie das Geschwindigkeitspotential $\varphi(x, y)$ stetige Ableitungen zweiter Ordnung besitzen muß, so ergeben sich durch partielle Differentiation der Gleichungen (17,9) die beiden Relationen

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},$$

aus denen man durch Subtraktion

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (17,91)$$

erhält. Auch die Stromfunktion $\psi(x, y)$ genügt somit der *Laplaceschen Differentialgleichung*.

§ 18. Ein ebenes aerodynamisches Randwertproblem.

Jedes Problem aus der Theorie der ebenen Potentialströmungen läuft letzten Endes auf die Aufgabe hinaus, eine Lösung der *Laplaceschen Differentialgleichung* (17,4) ausfindig zu machen, die bestimmten Anfangs- bzw. Randbedingungen genügt. Denn eine zweidimensionale Flüssigkeitsbewegung ist dann als gegeben anzusehen, wenn wir den Druck p sowie die beiden Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_y als Funktionen der ebenen Ortskoordinaten x und y sowie der Zeit t kennen; bei Voraussetzung der Existenz eines Geschwindigkeitspotentials φ und stationärer, kräftefrei erfolgender Strömung ist der Druck p durch (17,5) als Funktion der durch (17,51) gegebenen Geschwindigkeit v zu ermitteln, während die Geschwin-

digkeitskomponenten v_x und v_y gemäß (17,31) aus dem Geschwindigkeitspotential φ abzuleiten sind.

Das uns hier speziell interessierende ebene Strömungsproblem kann nun in enger Anlehnung an die in § 13 gemachten Ausführungen folgendermaßen gekennzeichnet werden: Ein gegebenes Tragflächenprofil, dessen Sehne in die

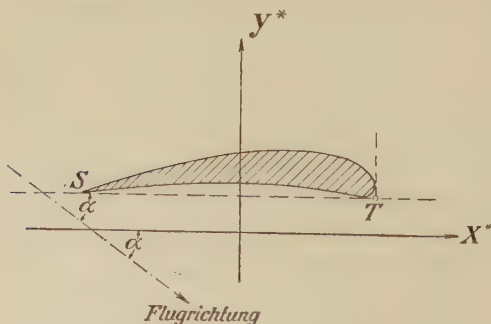


Fig. 7.

Richtung der X^* -Achse fallen möge (vgl. Fig. 7), bewegt sich geradlinig unter dem Anstellwinkel α mit konstanter Geschwindigkeit vom Betrage V in der X^*Y^* -Ebene, die wir uns von einer ursprünglich in Ruhe befindlichen idealen Flüssigkeit erfüllt denken. Den mit dieser Bewegung verbundenen, sicherlich nicht-stationären ebenen Strömungsvorgang dürfen wir wieder als wirbelfrei voraussetzen, und die Strömungsgeschwindigkeit wird mit unbegrenzt wachsender Entfernung vom Profil gegen Null konvergieren müssen. Um eine stationäre Strömung zu erhalten, führen wir ein mit dem Profil fest verbundenes XY -System ein, dessen Achsen zu den Achsen des „ruhenden“ X^*Y^* -Systems parallel sind, und dessen Anfangspunkt im Inneren des Profils gelegen ist (vgl. Fig. 8).

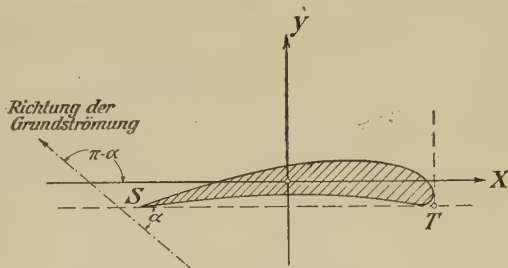


Fig. 8.

In Bezug auf dieses „mitbewegte“ XY -System ergibt sich nun bei Nichtvorhandensein des Profils eine Parallelströmung mit der Translationsgeschwindigkeit V , deren Richtung mit der positiven Richtung der X -Achse den Winkel $\pi - \alpha$ einschließt, d. h. also eine ebene Flüssigkeitsbewegung mit den Geschwindigkeitskomponenten

$$\left. \begin{aligned} v_x^{(0)}(x, y) &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = V \cdot \cos(\pi - \alpha) = -V \cdot \cos \alpha, \\ v_y^{(0)}(x, y) &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} = V \cdot \sin(\pi - \alpha) = V \cdot \sin \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (18,1)$$

aus denen sich das zugehörige Geschwindigkeitspotential $\varphi_0(x, y)$ sofort zu

$$\varphi_0(x, y) = -V \cdot \cos \alpha \cdot x + V \cdot \sin \alpha \cdot y \quad (18,2)$$

berechnet, falls die willkürlich bleibende additive Konstante der Einfachheit halber fortgelassen wird. Durch das Einbringen des Profils wird dann eine gewisse Modifikation dieser Grundströmung bedingt, der wir dadurch Rechnung tragen, daß wir für das Geschwindigkeitspotential $\varphi(x, y)$ der das Profil umfließenden stationären Flüssigkeitsströmung den Ansatz

$$\varphi(x, y) = \varphi_0(x, y) + \varphi_1(x, y) \quad (18,3)$$

machen, wobei $\varphi_1(x, y)$ eine einstweilen noch unbekannte, den einschlägigen Randbedingungen genügende Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung darstellt, während für $\varphi_0(x, y)$ die in (18,2) verzeichnete Funktion einzuführen ist.

Die einschlägigen Randbedingungen ergeben sich aus den beiden Forderungen, daß einerseits längs der Randkurve C desjenigen Gebiets B , das von dem Profil in der XY -Ebene erfüllt wird, die Strömungsgeschwindigkeit rein tangential gerichtet sein muß, sowie daß andererseits die durch das Profil bedingte Modifikation der Grundströmung in unbegrenzter Entfernung vom Profil verschwindend klein ausfällt. Die erstgenannte Forderung besagt, daß

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right]_C = 0, \quad (18,41)$$

mithin gemäß (18,3)

$$\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right]_C = - \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial n} \right]_C$$

sein muß. Da aber wegen (18,2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \cdot \cos(n, x) + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \cdot \cos(n, y) \\ &= -V \cdot \cos \alpha \cdot \cos(n, x) + V \cdot \sin \alpha \cdot \cos(n, y) \end{aligned}$$

gilt, so ergibt sich für $\varphi_1(x, y)$ die Randbedingung

$$\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right]_C = V \cdot \cos \alpha \cdot \cos(n, x) - V \cdot \sin \alpha \cdot \cos(n, y). \quad (18,42)$$

Die zweite Forderung läßt sich mit

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (18,43)$$

in analytischer Form durch die beiden Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} v_x &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -V \cdot \cos \alpha, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} v_y &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = V \cdot \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (18,44)$$

zum Ausdruck bringen, aus denen wegen (18,3) und (18,1)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0 \quad (18,45)$$

folgt.

Während es sich bei unseren bisherigen Ausführungen im wesentlichen um eine einfache Übertragung der für das in § 13 behandelte räumliche Randwertproblem charakteristischen Bedingungen vom Dreidimensionalen ins Zweidimensionale gehandelt hat, ist jetzt dem wichtigen Umstand Rechnung zu tragen, daß unser ebenes Strömungsgebiet zweifach zusam-

menhängend¹⁾, mithin in ihm ein mehrdeutiges Geschwindigkeitspotential mit einer von Null verschiedenen Zirkulationskonstanten möglich ist. Nun sind wir allerdings im Augenblick noch nicht in der Lage, den Wert der Zirkulationskonstanten für den Fall einer Potentialströmung um ein beliebig vorgegebenes Tragflächenprofil zahlenmäßig festzulegen. Wir werden jedoch diese wichtige Frage im weiteren Verlauf unserer Darlegungen in völlig befriedigender Weise zu erledigen vermögen, so daß wir uns jetzt damit begnügen können, die Zirkulationskonstante als eine willkürlich vorgeschriebene Größe anzusehen. Dementsprechend werden wir von dem zu bestimmenden Geschwindigkeitspotential $\varphi(x, y)$ verlangen, daß für jede das Profil B einmal umschlingende geschlossene Kurve C_1 die Relation

$$\int_{(C_1)} \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = J \quad (18,5)$$

erfüllt ist, wobei J eine vorgegebene Zahl bedeutet. Wegen (18,3) ergibt sich daraus

$$\int_{(C_1)} \frac{\partial \varphi_0}{\partial s} ds + \int_{(C_1)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} ds = J;$$

da aber gemäß (18,1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_0}{\partial s} &= \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} \\ &= -V \cdot \cos \alpha \cdot \cos(s, x) + V \cdot \sin \alpha \cdot \cos(s, y) \end{aligned}$$

zu setzen ist, und da

$$\int_{(C_1)} \cos(s, x) ds = \int_{(C_1)} \cos(s, y) ds = 0$$

gilt, so ist die Bedingung (18,5) mit der Forderung identisch, daß für jede das Profil B einmal umschlingende geschlossene Kurve C_1 die Gleichung

$$\int_{(C_1)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} ds = J \quad (18,51)$$

erfüllt sein soll.

¹⁾ Erweitern wir, wie's bekanntlich in der Funktionentheorie üblich ist, die Gesamtheit der eigentlichen Punkte einer Ebene durch Hinzufügung eines unendlich fernen Punktes, so ist das Außengebiet B' einer in der Ebene gezogenen beschränkten Kurve C dann und nur dann als zweifach zusammenhängend anzusehen, falls der unendlich ferne Punkt als nicht zu B' gehörig, mithin als ein Randpunkt von B' aufgefaßt wird. Denn jede die Berandung C von B' umschlingende geschlossene Kurve C_1 läßt sich ja, wie man sich besonders deutlich durch Zuhilfenahme der stereographischen Projektion veranschaulichen kann, auf den unendlich fernen Punkt durch allseitige unbegrenzte Erweiterung „zusammenziehen“, so daß, wenn der unendlich ferne Punkt als ein innerer Punkt von B' fungiert, jede in B' gezogene geschlossene Kurve in B' reduzierbar, mithin B' ein einfach zusammenhängendes Gebiet sein muß. In dem oben betrachteten Strömungsgebiet B' ist aber der unendlich ferne Punkt auf Grund der in (18,45) formulierten Grenzbedingung als Randpunkt anzusehen; die vollständige Berandung von B' besteht also aus der Kurve C einerseits und dem unendlich fernen Punkt andererseits, womit der zweifache Zusammenhang von B' sichergestellt ist.

Um nunmehr die Frage zu entscheiden, ob das durch die Bedingungen (18,42), (18,45) und (18,51) gekennzeichnete Problem nur eine einzige Lösung zuläßt oder nicht, nehmen wir an, daß jede der beiden Potentialfunktionen $\varphi_1^{(1)}(x, y)$ und $\varphi_1^{(2)}(x, y)$ den genannten Bedingungen genügt, und betrachten ihre Differenz

$$\varphi_1^{(0)}(x, y) = \varphi_1^{(1)}(x, y) - \varphi_1^{(2)}(x, y). \quad (18,6)$$

Da wegen (18,51)

$$\int_{(C_1)} \frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial s} ds = \int_{(C_1)} \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial s} ds - \int_{(C_1)} \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial s} ds = J - J = 0$$

gilt, so muß $\varphi_1^{(0)}(x, y)$ zunächst eine eindeutige Potentialfunktion sein. Ist dann k ein um den Ursprung als Mittelpunkt mit so großem Radius r geschlagener Kreis, daß das von der Profilkontur C berandete Innengebiet B ganz im Inneren der von k berandeten Kreisfläche liegt, und bedeutet B_0 das von C und von k berandete beschränkte ebene Gebiet, so liefert eine bekannte Integralformel¹⁾ die Beziehung

$$\begin{aligned} & \int_{(B_0)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial y} \right)^2 \right\} d\sigma + \int_{(B_0)} \varphi_1^{(0)} \cdot \Delta \varphi_1^{(0)} d\sigma \\ &= - \int_{(C)} \varphi_1^{(0)} \cdot \frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial n} ds - \int_{(k)} \varphi_1^{(0)} \cdot \frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial n} ds, \end{aligned}$$

aus der, da ja $\Delta \varphi_1^{(0)}$ in B_0 sowie $\frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial n}$ auf C verschwindet, sofort

$$\begin{aligned} & \int_{(B_0)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial y} \right)^2 \right\} d\sigma = - \int_{(k)} \varphi_1^{(0)} \cdot \frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial n} ds \\ &= - \int_0^{2\pi} \varphi_1^{(0)} \cdot \left(r \cdot \frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial n} \right) d\Theta \end{aligned}$$

folgt, so daß

$$\left. \begin{aligned} & \int_{(B')} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial y} \right)^2 \right\} d\sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{(B_0)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial y} \right)^2 \right\} d\sigma \\ &= - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \varphi_1^{(0)} \cdot \left(r \cdot \frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial n} \right) d\Theta \end{aligned} \right\} \quad (18,61)$$

¹⁾ Vgl. W. Sternberg, l. c. I, § 13. Bezüglich des Vorzeichens des längs C erstreckten Kurvenintegrals sind dabei die von uns über die positive Normalenrichtung und über die positive Integrationsrichtung getroffenen Festsetzungen zu beachten!

wird. Wegen der bereits hervorgehobenen, längs C bestehenden Relation

$$\frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial n} = 0 \text{ gilt aber}$$

$$-\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{(C)} \frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial n} ds = 0, \quad (18,62)$$

woraus die Regularität der in dem Außengebiet B' von C eindeutigen Potentialfunktion $\varphi_1^{(0)}(x, y)$ im Unendlichen zu entnehmen ist.¹⁾ Demnach muß

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi_1^{(0)}(x, y) = \text{const.} \quad \text{und} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \left(r \cdot \frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial n} \right) = 0 \quad (18,63)$$

sein, und hiermit erhalten wir gemäß (18,61) die Beziehung

$$\int_{(B')} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial y} \right)^2 \right\} d\sigma = 0,$$

die offenbar dann und nur dann erfüllt sein kann, wenn in ganz B'

$$\frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1^{(0)}}{\partial y} = 0,$$

mithin

$$\varphi_1^{(0)}(x, y) = \text{const.}$$

ist. In Verbindung mit (18,6) bringt dieses Resultat die wichtige Tatsache zum Ausdruck, daß das von uns betrachtete, durch die Bedingungen (18,42), (18,45) und (18,51) gekennzeichnete ebene aerodynamische Randwertproblem, falls es überhaupt lösbar ist, nur eine einzige Lösung zuläßt. Denn daß auch hier wieder, genau wie bei dem entsprechenden räumlichen Problem, die willkürlich bleibende additive Konstante völlig belanglos ist, leuchtet unmittelbar ein.

Die Existenzfrage selbst soll mit Benutzung funktionentheoretischer Methoden erledigt werden, weshalb wir zunächst ein Kapitel rein funktionentheoretischen Inhalts einschalten.

¹⁾ Denn die linke Seite von (18,62) mißt (vgl. J. Plemelj. Potentialtheoretische Untersuchungen S. 11, Leipzig 1911) die sogenannte Masse der Potentialfunktion $\varphi_1^{(0)}(x, y)$, und eine Potentialfunktion ist (vgl. W. Sternberg, l. c. I, § 9) dann und nur dann im Unendlichen regulär, d. h. genügt dann und nur dann den in (18,63) angeführten Grenzbedingungen, falls ihre Masse verschwindet.

Drittes Kapitel.

Funktionentheoretische Hilfsmittel.

§ 19. Allgemeine Eigenschaften analytischer Funktionen komplexen Arguments¹⁾.

Sei B ein von einer beschränkten geschlossenen Kurve C berandetes Gebiet der Ebene der komplexen Zahlen

$$z = x + iy = r \cdot (\cos \Theta + i \cdot \sin \Theta) = r \cdot e^{i\Theta}, \quad (19,1)$$

und sei

$$w = w(z) = \varphi(x, y) + i \cdot \psi(x, y) \quad (19,11)$$

eine Funktion von z derart, daß jedem in B gelegenen z ein und nur ein Wert $w(z)$ entspricht, sowie daß $w(z)$ an jeder in B gelegenen Stelle z sowohl stetig als auch differenzierbar ist. Alsdann wird $w(z)$ eine (eindeutige) in B reguläre analytische Funktion genannt, und B heißt das *Regularitätsgebiet* von $w(z)$. Der *Realteil* $\varphi(x, y)$ und der *Imaginärteil* $\psi(x, y)$ einer analytischen Funktion $w(z)$ hängen miteinander durch die *Cauchy-Riemannschen* Differentialgleichungen (17,9) zusammen, und beide Funktionen genügen überdies der *Laplaceschen* Differentialgleichung (17,4) bzw. (17,91). Sind umgekehrt $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ zwei in B definierte, daselbst mit stetigen partiellen Ableitungen erster Ordnung versehene Funktionen, zwischen denen die Relationen (17,9) bestehen, so stellt das aus ihnen gemäß (19,11) gebildete komplexe Aggregat eine in B analytische Funktion von z dar.

Für jede ganz in B gelegene geschlossene Kurve C_0 liefert der *Cauchysche Integralsatz* die Beziehung

$$\int_{(C_0)} w(z) dz = 0, \quad (19,2)$$

und unter derselben Voraussetzung bestehen die *Cauchyschen Integralformeln*

$$w(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(C_0)} \frac{w(z)}{z - z_0} dz \quad (19,3)$$

und

$$w^{(v)}(z_0) = \left(\frac{d^v w}{dz^v} \right)_{z=z_0} = \frac{v!}{2\pi i} \cdot \int_{(C_0)} \frac{w(z)}{(z - z_0)^{v+1}} dz, \quad (19,31)$$

falls z_0 irgendeine feste, in dem von C_0 berandeten Innengebiet gelegene Stelle bedeutet. Jede analytische Funktion ist demnach unbegrenzt oft

¹⁾ In diesem Paragraphen stellen wir diejenigen Dinge aus der Funktionentheorie kurz zusammen, deren Kenntnis wir vom Leser voraussetzen. Wer diese Vorkenntnisse nicht besitzt, findet alles Erforderliche ausführlich dargelegt bei K. Knopp, Funktionentheorie I (Sammlung Göschen Nr. 668).

differenzierbar. Als wichtigen Spezialfall von (19,3) — man wähle $w(z) = 1$ — heben wir die Relation

$$\int_{(C)} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i \quad (19,32)$$

hervor, die für jede beliebige geschlossene Kurve C erfüllt ist, deren Innengebiet den Punkt z_0 enthält. Hingegen gilt unter der gleichen Voraussetzung

$$\int_{(C)} (z - z_0)^\nu dz = 0 \quad (\nu = 0, 1, \pm 2, \pm 3, \dots), \quad (19,33)$$

obwohl der Integrand für negatives ν in dem von C berandeten Innengebiet nicht mehr überall regulär ist.

In einer gewissen Umgebung jeder in B gelegenen Stelle z_0 läßt sich $w(z)$ in eine und nur eine Potenzreihe von der Form

$$w(z) = A_0 + A_1(z - z_0) + A_2(z - z_0)^2 + \dots + A_\nu \cdot (z - z_0)^\nu + \dots \quad (19,4)$$

mit

$$A_0 = w(z_0), \quad A_\nu = \frac{w^{(\nu)}(z_0)}{\nu!} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(C_0)} \frac{w(z)}{(z - z_0)^{\nu+1}} dz \quad (19,41)$$

entwickeln, deren genaue Konvergenzkreisfläche die größte um z_0 als Mittelpunkt gelegte Kreisfläche ist, die noch ganz in dem Regularitätsgebiet B Platz finden kann. Die Ableitungen der Funktion $w(z)$ dürfen durch gliedweise Differentiation der Potenzreihenentwicklung (19,4) gebildet werden, wie sich überhaupt mit Potenzreihen wegen ihrer absoluten und gleichmäßigen Konvergenz in jeder in ihrer Konvergenzkreisfläche noch ganz enthaltenen konzentrischen Kreisfläche genau wie mit gewöhnlichen Summen endlich vieler Glieder operieren läßt.

Läßt sich $w(z)$ in einer passend gewählten Umgebung der Stelle z_0 in eine Reihe von der Form

$$w(z) = \frac{A_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{A_{-(m-1)}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{A_{-1}}{z - z_0} + A_0 + A_1 \cdot (z - z_0) + \dots + A_\nu \cdot (z - z_0)^\nu + \dots \quad (19,5)$$

mit $A_{-m} \neq 0$ und $m \geq 1$ entwickeln, so heißt z_0 ein *Pol m -ter Ordnung* der Funktion $w(z)$, und der Koeffizient

$$A_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(C_0)} w(z) dz \quad (19,51)$$

wird das *Residuum von $w(z)$ in z_0* genannt. Ist z_0 ein Pol erster Ordnung, so ist das Residuum R_0 von $w(z)$ in z_0 durch

$$R_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} \{(z - z_0) \cdot w(z)\} \quad (19,52)$$

gegeben. Als Verallgemeinerung von (19,2) besteht der *Cauchysche Residuensatz*

$$\int_{(C_0)} w(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{\nu=1}^n R_{\nu}, \quad (19,6)$$

falls $w(z)$ auf der beschränkten geschlossenen Kurve C_0 sowie in dem von C_0 berandeten Gebiet B_0 bis auf endlich viele, in B_0 gelegene Pole z_{ν} ($\nu = 1, 2, 3, \dots, n$) regulär ist, und R_{ν} das Residuum von $w(z)$ in z_{ν} bedeutet. Unter derselben Voraussetzung gilt schließlich

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(C_0)} \frac{w'(z)}{w(z)} dz = N_n - N_p, \quad (19,7)$$

falls N_n die Anzahl der in B_0 gelegenen Nullstellen der auf C_0 von Null verschiedenen und daselbst regulären Funktion $w(z)$ sowie N_p die Anzahl der in B_0 gelegenen Pole von $w(z)$ darstellt, und falls dabei sowohl jede Nullstelle als auch jeder Pol so oft gezählt wird, wie die betr. Ordnungszahl angibt.

§ 20. Konforme Abbildung¹⁾.

Der durch eine Funktion $\zeta = F(z)$ dargestellte Zusammenhang zwischen den beiden komplexen Variablen $z = x + iy$ und $\zeta = \xi + i\eta$ läßt sich anschaulich-geometrisch dahin deuten, daß jedem Punkt z der Z -Ebene, für den $F(z)$ definiert ist, ein Punkt ζ der Z -Ebene zugeordnet wird. Man spricht daher von einer durch die Funktion $\zeta = F(z)$ vermittelten *Abbildung* einer Punktmenge der Z -Ebene auf eine Punktmenge der Z -Ebene, und die durch diese Bezeichnung angedeutete Analogie zu einer physikalisch-optischen Abbildung ist tatsächlich unverkennbar. Denn genau wie irgendein optisches System, z. B. eine Linse oder ein ebener bzw. gekrümmter Spiegel, eine Konfiguration von Licht emittierenden Punkten in eine bestimmte Konfiguration von Bildpunkten abbildet, so führt auch eine Funktion $\zeta = F(z)$ eine Punktmenge der Z -Ebene in eine bestimmte Punktmenge der Z -Ebene über. Somit können wir uns eine solche Funktion physikalisch stets durch ein geeignetes optisches System veranschaulichen, wobei dann die Abbildungseigenschaften der betr. Funktion ihr genaues Gegenstück in den Abbildungseigenschaften des betr. optischen Systems finden.

Die analytischen Funktionen sind nun zunächst wegen ihrer Stetigkeit dadurch gekennzeichnet, daß die durch sie vermittelten Abbildungen die Eigenschaft der *Gebietstreue* besitzen, d. h. daß dabei ein Gebiet B der Z -Ebene als Bild in der Z -Ebene stets wieder ein Gebiet B liefert. Sind

¹⁾ Auch hier wieder setzen wir eine gewisse Vertrautheit mit den Grundlagen der Theorie als beim Leser vorhanden voraus. Wer sich hierüber eingehender orientieren will, sei verwiesen auf *L. Bieberbach*, Einführung in die konforme Abbildung (Sammlung Götschen Nr. 768).

ferner z_0 und $z_0 + \Delta z$ zwei auf einem ganz im Regularitätsgebiet der Funktion $\zeta = F(z)$ verlaufenden Kurvenstück c_1 der Z -Ebene gelegene Punkte, und setzen wir

$$\Delta z = r_1 \cdot e^{i\vartheta_1}, \quad (20,11)$$

so ist ϑ_1 derjenige Winkel, den die durch z_0 und $z_0 + \Delta z$ hindurchgelegte Kurvensekante s_1 mit der positiven Richtung der reellen Achse der Z -Ebene einschließt. Infolgedessen gilt

$$\alpha_1 = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \vartheta_1, \quad (20,12)$$

falls α_1 den von der in z_0 an c_1 gelegten Tangente t_1 mit der positiven Richtung der reellen Achse gebildeten Winkel bedeutet (vgl. Fig. 9). Sei sodann γ_1 das durch $\zeta = F(z)$ in der Z -Ebene gelieferte Bild von c_1 , und sei σ_1 die durch die auf γ_1 gelegenen Punkte $\zeta = F(z_0)$ und $\zeta = F(z_0 + \Delta z)$ gezogene Sekante sowie τ_1 die in $\zeta = F(z_0)$ an γ_1 gelegte Tangente (vgl. Fig. 10)¹⁾.

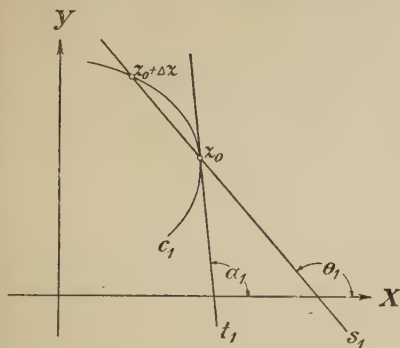


Fig. 9.

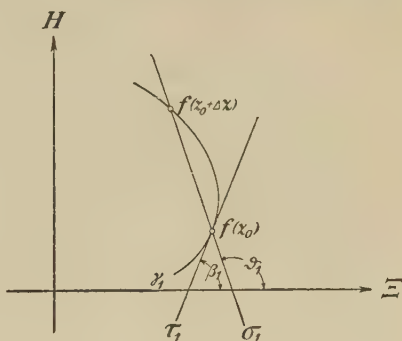


Fig. 10.

Setzen wir in Analogie zu (20,11)

$$F(z_0 + \Delta z) - F(z_0) = \varrho_1 \cdot e^{i\vartheta_1}, \quad (20,13)$$

so wird der durch

$$\beta_1 = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \vartheta_1 \quad (20,14)$$

definierte Winkel β_1 der Neigungswinkel der Tangente τ_1 gegen die positive Richtung der reellen Achse der Z -Ebene. Gemäß (20,11) und (20,13) besteht somit die Beziehung

$$\frac{F(z_0 + \Delta z) - F(z_0)}{\Delta z} = \frac{\varrho_1}{r_1} \cdot e^{i(\vartheta_1 - \vartheta_1)},$$

aus der sich für $\Delta z \rightarrow 0$ wegen der Differenzierbarkeit der analytischen Funktion $F(z)$

$$F'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\varrho_1}{r_1} \cdot e^{i(\vartheta_1 - \vartheta_1)} \right| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{\varrho_1}{r_1} \right) \cdot \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[e^{i(\vartheta_1 - \vartheta_1)} \right]$$

¹⁾ In Fig. 10 wurde die Abbildungsfunktion $F(z)$ versehentlich mit $f(z)$ bezeichnet.

ergibt. Ist daher $F'(z_0)$ von Null verschieden¹⁾, so muß insbesondere wegen (20,12) und (20,14)

$$\arg F'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\vartheta_1 - \Theta_1) = \beta_1 - \alpha_1 \quad (20,15)$$

sein. In entsprechender Weise findet man für ein zweites durch z_0 hindurchgehendes Kurvenstück c_2 mit Benutzung analoger Bezeichnungen

$$\arg F'(z_0) = \beta_2 - \alpha_2,$$

woraus durch Kombination mit (20,15) die Beziehung $\alpha_2 - \alpha_1 = \beta_2 - \beta_1$ folgt. So sehen wir also, daß die durch analytische Funktionen vermittelten Abbildungen an denjenigen Stellen, an denen die Abbildungsfunktion eine von Null verschiedene Ableitung hat, *winkeltreu* sind, womit gesagt sein soll, daß der von zwei sich schneidenden Kurvenstücken c_1 und c_2 der Z -Ebene eingeschlossene Winkel nach Größe und Drehungssinn dem von den beiden Bildkurvenstücken γ_1 und γ_2 der Z -Ebene eingeschlossenen Winkel gleich ist. Indem man eine gebiets- und winkeltreue Abbildung als eine *konforme Abbildung* bezeichnet, kann man daher kurz sagen, daß jede analytische Funktion überall dort, wo sie eine nicht verschwindende Ableitung besitzt, eine konforme Abbildung vermittelt. Ist umgekehrt die durch eine in einem Gebiet B der Z -Ebene definierte Funktion $F(z)$ bewirkte Abbildung an sämtlichen Stellen von B konform, so ist $F(z)$ eine in B analytische, mit von Null verschiedener Ableitung $F'(z)$ versehene Funktion, falls überdies vorausgesetzt wird, daß die partiellen Ableitungen des Real- und des Imaginärteils von $F(z)$ in B stetig sind und eine nicht verschwindende Determinante besitzen.

Ist $F(z)$ eine analytische Funktion von z , deren Ableitungen bis zur n -ten einschließlich an der Stelle z_0 verschwinden, während daselbst die $(n+1)$ -te Ableitung von Null verschieden ausfällt, so heißt z_0 ein *n -facher Kreuzungspunkt* von $F(z)$. Ein Beispiel einfachster Art bietet die Funktion

$$\zeta = z^2, \quad (20,2)$$

die im Nullpunkt einen einfachen Kreuzungspunkt besitzt. Mit

$$z = r \cdot e^{i\vartheta}, \quad \zeta = \rho \cdot e^{i\vartheta} \quad (20,21)$$

geht (20,2) in

$$\rho \cdot e^{i\vartheta} = r^2 \cdot e^{i \cdot 2\vartheta}$$

über, woraus

$$\rho = r^2, \quad \vartheta = 2\Theta \quad (20,22)$$

folgt. Betrachten wir nun zwei vom Nullpunkt $z = 0$ der Z -Ebene ausgehende Halbgeraden, die mit der positiven Richtung der reellen Achse die Winkel Θ_1 bzw. Θ_2 , mithin miteinander den Winkel $\Theta_2 - \Theta_1$ einschließen,

¹⁾ Diese Voraussetzung ist erforderlich, um den in (20,15) formulierten Schluß ziehen zu können, da ja $\arg F'(z_0)$ für $F'(z_0) = 0$ völlig unbestimmt bleibt.

so gehen diese beiden Halbgeraden bei der durch (20,2) vermittelten Abbildung der Z -Ebene auf die Z -Ebene in zwei vom Nullpunkt $\zeta = 0$ ausgehende Halbgeraden der Z -Ebene über, die mit der positiven Richtung der reellen Achse gemäß (20,22) die Winkel $\vartheta_1 = 2\Theta_1$ bzw. $\vartheta_2 = 2\Theta_2$, mithin miteinander den Winkel $\vartheta_2 - \vartheta_1 = 2 \cdot (\Theta_2 - \Theta_1)$ einschließen. In dem Kreuzungspunkt $z = 0$ ist demnach die Konformität der durch (20,2) vermittelten Abbildung unterbrochen; vielmehr findet hier stets eine Verdoppelung der Schnittwinkel zweier Kurven statt — eine Tatsache, die uns sogleich zu einer sonderbaren Schlußfolgerung führen wird. Lassen wir nämlich eine vom Nullpunkt der Z -Ebene ausgehende Halbgerade, die zunächst mit der positiven reellen Achse zusammenfallen möge, sich im positiven Umlaufssinn um den Nullpunkt drehen, so wird die dabei jeweils in der Z -Ebene erhaltene Bildgerade, die ja ebenfalls vom Nullpunkt der Z -Ebene ausgeht, bereits die volle Z -Ebene überstrichen haben, wenn die Originalgerade in der Z -Ebene erst die oberhalb der reellen Achse gelegene Halbebene durchfahren hat. Dreht sich dann die Originalgerade weiter, d. h. durchläuft sie den unterhalb der reellen Achse gelegenen Teil der Z -Ebene, so beschreibt die Bildgerade aufs neue ein volles Exemplar der Z -Ebene, um dann schließlich, wenn ein ganzer Umlauf in der Z -Ebene abgeschlossen ist, wieder mit der positiven reellen Achse der Z -Ebene zusammenzufallen. Das durch die Funktion (20,2) gelieferte Bildgebiet der vollen Z -Ebene ist somit die doppelt überdeckte Z -Ebene oder, wie man dafür zu sagen pflegt, eine *zweiblättrige Riemannsche Fläche*, indem man ganz allgemein unter einer *Riemannschen Fläche* eine mehrfach überdeckte Fläche versteht. Und zwar muß man sich das Ende des zweiten Blattes, das ja mit der positiven reellen Achse der Z -Ebene zusammenfällt, an den Anfang des ersten Blattes, der ja ebenfalls durch die positive reelle Achse der Z -Ebene gegeben ist, unter Selbstdurchdringung unseres Flächengebildes angeheftet denken, da diese beiden, die positive reelle Achse der Z -Ebene überdeckenden Halbgeraden einer und derselben positiven reellen Achse der Z -Ebene entsprechen. Den Nullpunkt der Z -Ebene bezeichnet man dabei als *Windungspunkt* der zweiblättrigen *Riemannschen Fläche*, eben weil sich diese Fläche um jenen Nullpunkt schraubenartig herumwindet.

Die zu (20,2) inverse Funktion ist durch

$$z = \sqrt{\zeta} \quad (20,23)$$

gegeben. Den vorstehenden Ausführungen zufolge stellt sie eine zweideutige Funktion von ζ dar, da ja zu einem Wert von ζ zwei Werte von z gehören, die zwar denselben absoluten Betrag, jedoch zwei sich um π voneinander unterscheidende Argumente besitzen. Diese Zweideutigkeit besteht aber nur dann, falls man sich die Werte von ζ , wie wir's bisher ausschließlich getan haben, durch Punkte einer *schlichten*, d. h. einfach überdeckten Zahlenebene veranschaulicht denkt. Auf der zuvor eingeführten

zweiblättrigen *Riemannschen* Fläche hingegen ist (20,23) als eine eindeutige Funktion von ζ anzusehen, da ja jedem Punkt eines einzelnen Blattes dieser Fläche lediglich ein einziger Punkt der Z -Ebene zugeordnet ist. Die durch die Funktion (20,23) vermittelte Abbildung der zweiblättrigen Z -Ebene auf die Z -Ebene ist somit eine umkehrbar eindeutige Abbildung. Den durch ein einzelnes Blatt einer *Riemannschen* Fläche repräsentierten Funktionsverlauf pflegt man als einen *Zweig* der betr. Funktion zu bezeichnen, so daß also die Funktion (20,23) zwei Zweige besitzt, deren jeder eine eindeutige Funktion von ζ darstellt. Aus der zweiblättrigen *Riemannschen* Fläche der Funktion (20,23) kann man ein einzelnes Blatt z. B. dadurch abtrennen, daß man sich die Fläche durch einen längs der positiven reellen Achse geführten Schnitt aufgeschlitzt denkt. Man erhält dann als einzelnes Blatt der Fläche ein längs der positiven reellen Achse aufgeschlitztes Exemplar der Z -Ebene, und zwar entspricht dabei der obere Rand des Schlitzes der positiven reellen Achse der Z -Ebene, während dem unteren Rand des Schlitzes die negative reelle Achse der Z -Ebene zugeordnet ist.

In durchaus ähnlicher Weise wird man durch Betrachtung der unendlich-vieldeutigen Funktion $\zeta = \ln z$ zu der unendlich-vielblättrigen *Riemannschen* Fläche des Logarithmus geführt, auf der $\ln z$ eine eindeutige Ortsfunktion darstellt. Und da definitionsgemäß für beliebiges reelles oder komplexes a

$$\zeta = z^a = e^{a \ln z}$$

zu setzen ist, so ist auch die *allgemeine Potenz* z^a im allgemeinen erst auf der unendlich-vielblättrigen *Riemannschen* Fläche des Logarithmus eindeutig festlegbar. Nur für rationales a genügt wegen

$$z^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{z^{\frac{m}{n}}} \quad (m \text{ und } n > 0 \text{ ganzzahlig})$$

bereits eine endlich-vielblättrige Z -Ebene, um die Potenz zu einer eindeutigen Ortsfunktion zu machen. Indem wir die im Anschluß an (20,2) angestellte Überlegung sinngemäß übertragen, gelangen wir leicht zu der Einsicht, daß bei der durch die Funktion $\zeta = z^a$ für den Fall eines beliebigen reellen Exponenten a vermittelten Abbildung der Z -Ebene auf die Z -Ebene die Größe des Schnittwinkels zweier sich im Nullpunkt der Z -Ebene schneidender Kurven mit der Zahl a multipliziert wird. Als Umkehrung dieses Satzes läßt sich sodann das folgende, später an entscheidender Stelle zur Anwendung gelangende Theorem beweisen: Wenn sich bei der durch $\zeta = f(z)$ vermittelten Abbildung der Schnittwinkel zweier Kurven an der Stelle z_0 mit der Zahl a multipliziert, so kann die Funktion $f(z)$ in einer hinreichend kleinen Umgebung der Stelle z_0 in der Form

$$f(z) = g(z) + (z - z_0)^a \cdot g_1(z) \quad (20,3)$$

dargestellt werden, wobei unter $g_1(z)$ eine an der Stelle z_0 reguläre und daselbst

von Null verschiedene analytische Funktion von z zu verstehen ist, während die für $z = z_0$ ebenfalls reguläre Funktion $g(z)$ den beiden Bedingungen

$$g(z_0) = f(z_0) \quad \text{und} \quad g'(z_0) \neq 0 \quad (20,31)$$

genügt. Unter den genannten Voraussetzungen stellt nämlich

$$w = f(z) - g(z) \quad (20,32)$$

eine Funktion von z dar, die für $z = z_0$ verschwindet, und die an dieser Stelle eine Multiplikation des Schnittwinkels zweier Kurven der Z -Ebene mit der Zahl α bewirkt. Setzen wir nun

$$w^* = w^{\frac{1}{\alpha}} = \{f(z) - g(z)\}^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (20,33)$$

so muß auch w^* an der Stelle z_0 verschwinden und eine daselbst reguläre, mit nicht verschwindender Ableitung versehene Funktion von z darstellen. Denn auf Grund des zuvor erwähnten Satzes wird bei der durch (20,33) vermittelten Abbildung der W -Ebene auf die W^* -Ebene der Schnittwinkel zweier sich im Nullpunkt $w = 0$ der W -Ebene schneidender Kurven mit der Zahl $1/\alpha$ multipliziert, und da sich bei der durch (20,32) vermittelten Abbildung der Z -Ebene auf die W -Ebene der Schnittwinkel zweier Kurven an der $w = 0$ entsprechenden Stelle $z = z_0$ mit α multipliziert, so ist die durch (20,33) vermittelte Abbildung der Z -Ebene auf die W^* -Ebene an der Stelle z_0 konform, mithin w^* eine an dieser Stelle reguläre, mit nicht verschwindender Ableitung versehene Funktion von z . Und da, wie bereits hervorgehoben wurde, $w^*(z_0) = 0$ gilt, so kann w^* gemäß (19,4) und (19,41) in einer hinreichend kleinen Umgebung der Stelle z_0 in eine Potenzreihe von der Form

$$w^* = A_1 \cdot (z - z_0) + A_2 \cdot (z - z_0)^2 + \dots + A_\nu \cdot (z - z_0)^\nu + \dots$$

entwickelt werden, wobei $A_1 \neq 0$ sein muß. Gemäß (20,33) ergibt sich somit $\{f(z) - g(z)\}^{1/\alpha} = (z - z_0) \cdot \{A_1 + A_2 \cdot (z - z_0) + \dots + A_\nu \cdot (z - z_0)^{\nu-1} + \dots\}$, woraus durch Potenzierung mit α

$f(z) - g(z) = (z - z_0)^\alpha \cdot \{A_1 + A_2 \cdot (z - z_0) + \dots + A_\nu \cdot (z - z_0)^{\nu-1} + \dots\}^\alpha$ folgt. Der auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Klammerausdruck ist aber als analytische Funktion einer analytischen Funktion eine an der Stelle z_0 sicherlich selbst wieder analytische Funktion $g_1(z)$, und da überdies $g_1(z_0) = A_1^\alpha \neq 0$ gilt, so ist hiermit der oben formulierte Satz in allen Stücken bewiesen.

Um schließlich den Charakter der durch die Funktion

$$\zeta = z + \frac{c^2}{z} \quad (20,4)$$

mit positiv reellem c vermittelten Abbildung zu überblicken, setzen wir

$$\zeta = \xi + i \eta, \quad z = r \cdot (\cos \Theta + i \cdot \sin \Theta),$$

womit (20,4) in

$$\xi + i\eta = \left(r + \frac{c^2}{r}\right) \cdot \cos \Theta + i \cdot \left(r - \frac{c^2}{r}\right) \cdot \sin \Theta$$

übergeht. Hieraus folgt

$$\xi = \left(r + \frac{c^2}{r}\right) \cdot \cos \Theta, \quad \eta = \left(r - \frac{c^2}{r}\right) \cdot \sin \Theta,$$

so daß die Beziehung

$$\frac{\xi^2}{\left(r + \frac{c^2}{r}\right)^2} + \frac{\eta^2}{\left(r - \frac{c^2}{r}\right)^2} = 1 \quad (20,41)$$

bestehen muß. Für einen festen Wert von r stellt dies aber die Mittelpunktsleichung einer Ellipse der Z -Ebene mit den Halbachsen $r + \frac{c^2}{r}$ und $r - \frac{c^2}{r}$ dar, und da $r = \text{const.}$ die Gleichung eines mit dem Radius r um den Nullpunkt als Mittelpunkt geschlagenen Kreises der Z -Ebene ist, so geht somit die Schar dieser Kreise der Z -Ebene in die Schar der durch (20,41) gegebenen Ellipsen der Z -Ebene über. Lassen wir die Größe von r , mit beliebig großen Werten beginnend, beständig abnehmen, so werden die beiden Halbachsen der Bildellipsen in der Z -Ebene, von ebenfalls sehr großen Werten ausgehend, auch ihrerseits immer kleiner, bis für $r = c$ die Bildellipse auf die doppelt durchlaufene, auf der reellen Achse der Z -Ebene gelegene Strecke

$$-2c \leq \xi \leq +2c \quad (20,42)$$

zusammenschrumpft (vgl. Fig. 11). Durch (20,4) wird also mit anderen Worten das Außengebiet des Kreises $|z| = c$ der Z -Ebene auf die volle,

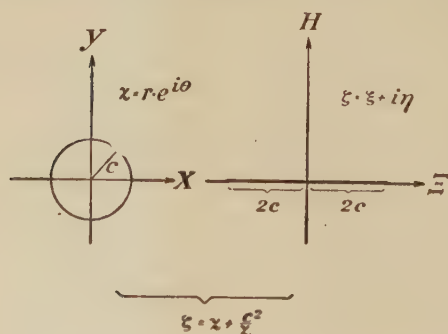


Fig. 11.

längs der durch (20,42) dargestellten Strecke aufgeschlitzte Z -Ebene abgebildet. Wird dann r kleiner als c gewählt, so nehmen die Längen der Halbachsen der in der Z -Ebene gelieferten Bildellipsen (20,41) wieder zu, und zwar um so mehr, je mehr sich r dem Werte Null nähert. Infolgedessen wird durch (20,4) auch das Innengebiet des Kreises $|z| = c$ der Z -Ebene auf die volle, in der zuvor genannten

Weise aufgeschlitzte Z -Ebene ab-

gebildet. Um die Abbildung umkehrbar-eindeutig zu gestalten, müssen wir offenbar die schlichte Z -Ebene durch eine zweiblättrige *Riemannsche*

Fläche ersetzen, indem wir uns zwei Exemplare der Z -Ebene, die beide längs der durch (20,42) dargestellten Strecke aufgeschlitzt sind, übereinandergelegt und durch kreuzweise Aneinanderheftung der vier Schlitzränder miteinander verbunden denken. Alsdann entspricht dem Innengebiet des Kreises $|z| = c$ der Z -Ebene das eine, dem Außengebiet dieses Kreises aber das andere Blatt jener Fläche, womit die umkehrbar-eindeutige Natur der durch (20,4) besorgten Abbildung gewährleistet wird.

§ 21. Übertragung analytischer Funktionen in nicht-beschränkte Regularitätsgebiete.

Sei

$$w = w^*(\zeta) \quad (21,1)$$

eine Funktion von ζ , die sich in einem Gebiet B der Z -Ebene regulär analytisch verhält. Und zwar sei B das Bildgebiet eines gewissen Gebiets B der Z -Ebene, das sich bei der durch die in B reguläre analytische Funktion

$$\zeta = F(z) \quad (21,2)$$

vermittelten Abbildung der Z -Ebene auf die Z -Ebene ergibt. Setzt man dann (21,2) in (21,1) ein, so erhält man in

$$w = w^*\{F(z)\} = w(z)$$

eine in dem Gebiet B der Z -Ebene definierte Funktion $w(z)$, die daselbst als analytische Funktion w^* der analytischen Funktion F eine ihrerseits ebenfalls analytische Funktion von z darstellt. Infolgedessen können wir diesen Sachverhalt dahin zum Ausdruck bringen, daß die Funktion (21,1) durch die Funktion (21,2) aus dem Gebiet B der Z -Ebene in das Gebiet B der Z -Ebene *übertragen* wird.

Bisher haben wir uns nun ausschließlich mit der Untersuchung von Funktionen mit beschränkten Definitions- bzw. Regularitätsgebieten befaßt. Wollen wir jetzt auch *nicht-beschränkte Regularitätsgebiete* zulassen, so müssen wir zunächst eine Festsetzung darüber treffen, was unter einer im Unendlichen, d. h. also an der Stelle $z = \infty$, regulären analytischen Funktion zu verstehen ist. Um auf sinngemäße Weise zu einer diesbezüglichen Definition zu gelangen, betrachten wir das Außengebiet B' einer beschränkten geschlossenen Kurve C der Z -Ebene, und bemerken, daß dieses Gebiet durch die Funktion

$$\zeta = \frac{1}{z} \quad (21,3)$$

umkehrbar eindeutig und konform auf ein beschränktes, den Nullpunkt $\zeta = 0$ als inneren Punkt enthaltendes Gebiet B_0 der Z -Ebene abgebildet wird. Denn (21,3) bildet ja bekanntlich das Außengebiet des Einheitskreises der Z -Ebene auf die Einheitskreisfläche der Z -Ebene ab, wobei der Punkt $z = \infty$, der ja einen inneren Punkt des von uns betrachteten

Außengebiets B' darstellt, in den Nullpunkt $\zeta = 0$ der Z -Ebene übergeht. Ist dann $w = w^*(\zeta)$ eine in B_0 reguläre analytische Funktion von ζ , so muß sie sich durch die Funktion (21,3) in das Gebiet B' der Z -Ebene übertragen lassen, und da hierbei, wie ja bereits hervorgehoben wurde, der Punkt $z = \infty$ dem Punkt $\zeta = 0$ entspricht, so wird es zweckmäßig erscheinen, eine Funktion $w = w(z)$ dann an der Stelle $z = \infty$ regulär zu

nennen, falls die Funktion $w = w\left(\frac{1}{\zeta}\right) = w^*(\zeta)$ an der Stelle $\zeta = 0$ regulär ist, und man wird $w(\infty) = w^*(0)$ setzen. Und da sich eine für $\zeta = 0$ reguläre Funktion $w^*(\zeta)$ gemäß (19,4) in einer hinreichend kleinen Umgebung der Stelle $\zeta = 0$ in eine Potenzreihe von der Form

$$w^*(\zeta) = a_0 + a_1 \cdot \zeta + a_2 \cdot \zeta^2 + a_3 \cdot \zeta^3 + \cdots + a_\nu \cdot \zeta^\nu + \cdots$$

entwickeln läßt, so muß sich jede an der Stelle $z = \infty$ reguläre analytische Funktion $w(z)$ in eine Reihe von der Form

$$w(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \cdots + \frac{a_\nu}{z^\nu} + \cdots \quad (21,4)$$

entwickeln lassen, die im Außengebiet eines mit hinreichend großem Radius um den Nullpunkt der Z -Ebene als Mittelpunkt geschlagenen Kreises absolut und gleichmäßig konvergiert. Gilt hierin $a_\nu = 0$ für $\nu = 0, 1, 2, \dots, n-1$, hingegen $a_n \neq 0$, so heißt $z = \infty$ eine n -fache Nullstelle von $w(z)$. Als ein Pol m -ter Ordnung ($m \geq 1$) von $w(z)$ wird die Stelle $z = \infty$ dann bezeichnet, wenn $w(z)$ eine im Außengebiet eines mit hinreichend großem Radius um $z = 0$ geschlagenen Kreises gültige Entwicklung von der Form

$$w(z) = \frac{a_{-m}}{z^m} + \frac{a_{-(m-1)}}{z^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots + \frac{a_\nu}{z^\nu} + \cdots \quad (21,5)$$

mit $a_{-m} \neq 0$ besitzt, so daß $w(z)$ dann und nur dann im Unendlichen regulär ist, falls die Relation

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \left(z \cdot \frac{dw}{dz} \right) = 0 \quad (21,61)$$

besteht.

Sei nunmehr $w(z)$ eine im Unendlichen reguläre Funktion von z , die im Außengebiet κ'_1 des um den Nullpunkt der Z -Ebene mit dem Radius r_1 geschlagenen Kreises k_1 die in κ'_1 absolut und gleichmäßig konvergierende Entwicklung (21,4) zuläßt. Ist dann z_0 eine beliebige Stelle der Z -Ebene, und führen wir die Identität $z = (z - z_0) + z_0$ in (21,4) ein, so erhalten wir

$$w(z) = a_0 + \frac{a_1}{(z - z_0) \left(1 + \frac{z_0}{z - z_0} \right)} + \frac{a_2}{(z - z_0)^2 \cdot \left(1 + \frac{z_0}{z - z_0} \right)^2} + \cdots \quad (21,62)$$

Nun können wir

$$\frac{1}{1 + \frac{z_0}{z - z_0}} = 1 - \left(\frac{z_0}{z - z_0} \right) + \left(\frac{z_0}{z - z_0} \right)^2 - \left(\frac{z_0}{z - z_0} \right)^3 + \dots \quad (21,63)$$

setzen, solange

$$\left| \frac{z_0}{z - z_0} \right| < 1 \quad (21,631)$$

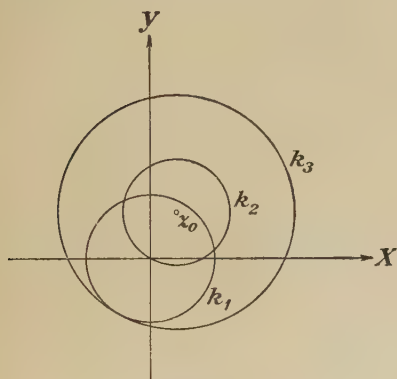


Fig. 12.

oder $|z - z_0| > |z_0|$ bleibt. Diese Bedingung besagt aber (vgl. Fig. 12), daß z im Außengebiet κ'_2 des um die Stelle z_0 als Mittelpunkt mit dem Radius $r_2 = |z_0|$ geschlagenen Kreises k_2 liegen muß. Als dann wird

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1 + \frac{z_0}{z - z_0}} \right)^2 &= \left\{ 1 + \frac{-z_0}{z - z_0} + \frac{z_0^2}{(z - z_0)^2} + \frac{-z_0^3}{(z - z_0)^3} + \dots \right\}^2 \\ &= 1 + \frac{-2z_0}{z - z_0} + \frac{z_0^2 + 2z_0^2}{(z - z_0)^2} + \frac{-2z_0^3 - 2z_0^3}{(z - z_0)^3} + \dots \end{aligned}$$

oder

$$\left(\frac{1}{1 + \frac{z_0}{z - z_0}} \right)^2 = 1 - 2 \left(\frac{z_0}{z - z_0} \right) + 3 \cdot \left(\frac{z_0}{z - z_0} \right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{z_0}{z - z_0} \right)^3 + \dots, \quad (21,64)$$

und in entsprechender Weise lassen sich die Ausdrücke

$$\left(\frac{1}{1 + \frac{z_0}{z - z_0}} \right)^{\nu} \quad (\nu = 3, 4, 5, 6, \dots)$$

nach steigenden Potenzen von $\frac{z_0}{z - z_0}$ entwickeln. Tragen wir die so erhaltenen Entwicklungen in (21,62) ein, so dürfen wir die alsdann entstehende Reihe

$$w(z) = a_0 + \left. \begin{aligned} &+ \frac{a_1}{z - z_0} - \frac{a_1 z_0}{(z - z_0)^2} + \frac{a_1 z_0^2}{(z - z_0)^3} - \dots \\ &\quad + \frac{a_2}{(z - z_0)^2} - \frac{2a_2 z_0}{(z - z_0)^3} + \dots \\ &\quad \quad + \frac{a_3}{(z - z_0)^3} - \dots \\ &\quad \quad \quad + \dots \end{aligned} \right\} \quad (21,65)$$

durch Zusammenfassung der in den einzelnen Spalten stehenden Glieder nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{z - z_0}$ umordnen, falls sämtliche in den Zeilen stehenden Reihen absolut konvergent sind, und falls überdies, wenn

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{|z - z_0|} + \frac{|z_0|}{|z - z_0|^2} + \frac{|z_0|^2}{|z - z_0|^3} + \dots, \\ S_2 &= \frac{1}{|z - z_0|^2} + \frac{2 \cdot |z_0|}{|z - z_0|^3} + \frac{3 \cdot |z_0|^2}{|z - z_0|^4} + \dots, \\ S_3 &= \frac{1}{|z - z_0|^3} + \frac{3 \cdot |z_0|}{|z - z_0|^4} + \frac{6 \cdot |z_0|^2}{|z - z_0|^5} + \dots, \\ &\dots \end{aligned}$$

gesetzt wird, auch die Reihe

$$a_0 + a_1 \cdot S_1 + a_2 \cdot S_2 + a_3 \cdot S_3 + \dots \quad (21,66)$$

konvergiert. Da nun wegen (21,631)

$$S_1 = \frac{1}{|z - z_0|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{|z_0|}{|z - z_0|}} = \frac{1}{|z - z_0| - |z_0|}$$

sowie in entsprechender Weise

$$S_2 = \frac{1}{\{|z - z_0| - |z_0|\}^2}, \quad S_3 = \frac{1}{\{|z - z_0| - |z_0|\}^3}, \quad \dots$$

gilt, so ist (21,66), wie sich sofort durch Vergleich mit (21,4) ergibt, sicher dann konvergent, wenn die wegen (21,631) positive GröÙe $|z - z_0| - |z_0|$ der Bedingung $|z - z_0| - |z_0| > r_1$ genügt, mithin $|z - z_0| > r_1 + |z_0|$ bleibt — eine Bedingung, die offenbar für alle diejenigen z erfüllt ist, die (vgl. wieder Fig. 12) im Außengebiet κ'_3 des mit dem Radius $r_3 = r_1 + |z_0|$ um die Stelle z_0 als Mittelpunkt geschlagenen Kreises k_3 gelegen sind. Für

jedes in κ'_0 befindliche z darf demnach die Reihe (21,65) nach steigenden Potenzen von $\frac{1}{z - z_0}$ umgeordnet werden, und es besteht somit der Satz:

Ist $w(z)$ eine im Punkte $z = \infty$ reguläre Funktion, und läßt sich $w(z)$ im Außengebiet κ'_1 eines mit dem Radius r_1 um den Nullpunkt $z = 0$ geschlagenen Kreises in die daselbst absolut und gleichmäßig konvergierende Reihe (21,4) entwickeln, so gilt im Außengebiet desjenigen Kreises, der um die beliebig gelegene Stelle z_0 als Mittelpunkt mit dem Radius $r_1 + |z_0|$ geschlagen ist, die daselbst absolut und gleichmäßig konvergente Entwicklung

$$w(z) = a_0^* + \frac{a_1^*}{z - z_0} + \frac{a_2^*}{(z - z_0)^2} + \frac{a_3^*}{(z - z_0)^3} + \dots, \quad (21,7)$$

deren Koeffizienten a_v^* durch die Relationen

$$\left. \begin{aligned} a_0^* &= a_0, \\ a_1^* &= a_1, \\ a_2^* &= a_2 - a_1 z_0, \\ a_3^* &= a_3 - 2a_2 z_0 + a_1 z_0^2, \\ a_4^* &= a_4 - 3a_3 z_0 + 3a_2 z_0^2 - a_1 z_0^3, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (21,71)$$

mit den Koeffizienten a_v der Entwicklung (21,4) zusammenhängen.

§ 22. Integralsätze in nicht-beschränkten Regularitätsgebieten.

Ist $w(z)$ eine im Außengebiet B' einer beschränkten geschlossenen Kurve C reguläre Funktion von z , und ist z_0 eine in B' gelegene Stelle der

Z -Ebene, so ist die Funktion $\frac{w(z)}{z - z_0}$

in jedem solchen Gebiet der Z -Ebene regulär, das aus B' durch Wegnahme derjenigen Kreisfläche entsteht, die von einem mit passend gewähltem Radius um z_0 als Mittelpunkt geschlagenen, die Kurve C nicht schneidenden Kreis k_0 berandet wird. Ist daher k_1 ein zweiter um z_0 als Mittelpunkt geschlagener Kreis, derart, daß sowohl der Kreis k_0 als auch die Kurve C ganz in der von k_1 berandeten Kreisfläche verbleiben (vgl. Fig. 13), so gilt gemäß (19,2)

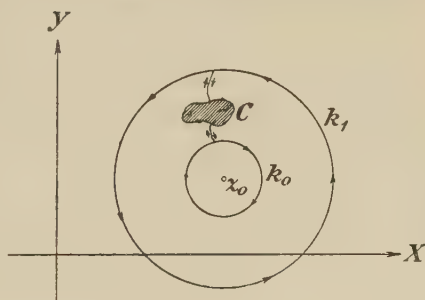


Fig. 13.

$$\int_{(k_1)} \frac{w(z)}{z - z_0} dz - \int_{(k_0)} \frac{w(z)}{z - z_0} dz - \int_{(C)} \frac{w(z)}{z - z_0} dz = 0,$$

wofür wir unter Berücksichtigung von (19,3) auch

$$w(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(k_1)} \frac{w(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(C)} \frac{w(z)}{z - z_0} dz \quad (22,1)$$

schreiben können. Wird ferner der Kreis k_1 so groß gewählt, daß auf ihm die in (21,7) angeschriebene Reihenentwicklung Gültigkeit besitzt, so wird wegen (19,32) und (19,33)

$$\begin{aligned} \int_{(k_1)} \frac{w(z)}{z - z_0} dz &= \int_{(k_1)} \left\{ \frac{a_0^*}{z - z_0} + \frac{a_1^*}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{a_r^*}{(z - z_0)^{r+1}} + \dots \right\} dz \\ &= 2\pi i \cdot a_0^* = 2\pi i \cdot w(\infty), \end{aligned}$$

so daß (22,1) die Beziehung

$$w(z_0) = w(\infty) - \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(C)} \frac{w(z)}{z - z_0} dz \quad (22,11)$$

liefert. Hiermit ist offenbar eine der *Cauchyschen* Integralformel (19,3)

bei Voraussetzung eines nicht-beschränkten Regularitätsgebiets entsprechende Relation aufgefunden.

Ist $w(z)$ eine im Außengebiet B' einer beschränkten geschlossenen Kurve C definierte Funktion von z , und ist k ein um den Nullpunkt als Mittelpunkt mit so großem Radius geschlagener Kreis, daß sämtliche im Endlichen gelegenen Nullstellen und Pole der Funktion $w(z)$ dem von k und von C berandeten (beschränkten) Gebiet B_0 angehören, so gilt (vgl. Fig. 14) gemäß (19,7)

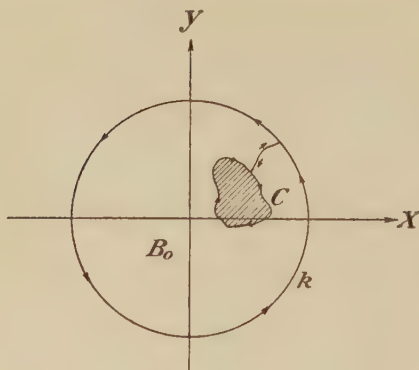


Fig. 14.

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(k)} \frac{w'(z)}{w(z)} dz - \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(C)} \frac{w'(z)}{w(z)} dz = N_n^* - N_p^*$$

oder

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(C)} \frac{w'(z)}{w(z)} dz = N_p^* - N_n^* + \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(k)} \frac{w'(z)}{w(z)} dz. \quad (22,2)$$

Dabei bedeutet N_n^* die Anzahl der im Endlichen gelegenen Nullstellen, desgleichen N_p^* die Anzahl der im Endlichen gelegenen Pole der Funktion $w(z)$, und zwar derart, daß sowohl jede Nullstelle als auch jeder Pol so oft

gezählt wird, wie die betr. Ordnungszahl angibt. Ist nun $z = \infty$ eine n -fache Nullstelle von $w(z)$, so gilt im Außengebiet κ' von k gemäß (21,4)

$$w(z) = \frac{a_n}{z^n} + \frac{a_{n+1}}{z^{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{z^{n+2}} + \dots,$$

$$w'(z) = -\frac{n \cdot a_n}{z^{n+1}} - \frac{(n+1) \cdot a_{n+1}}{z^{n+2}} - \frac{(n+2) \cdot a_{n+2}}{z^{n+3}} - \dots,$$

mithin

$$\frac{w'(z)}{w(z)} = -n \cdot \frac{1}{z} - \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{1}{z^2} - \dots,$$

so daß wegen (19,32) und (19,33)

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(k)} \frac{w'(z)}{w(z)} dz = -n \quad (22,21)$$

wird. Ist hingegen $z = \infty$ ein Pol m -ter Ordnung von $w(z)$, so gilt in κ' gemäß (21,5)

$$w(z) = a_{-m} \cdot z^m + a_{-(m-1)} \cdot z^{m-1} + \dots + a_{-1} \cdot z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots,$$

$$w'(z) = m \cdot a_{-m} \cdot z^{m-1} + (m-1) \cdot a_{-(m-1)} \cdot z^{m-2} + \dots$$

$$+ a_{-1} - \frac{a_1}{z^2} - \frac{2a_2}{z^3} - \dots,$$

mithin

$$\frac{w'(z)}{w(z)} = m \cdot \frac{1}{z} - \frac{a_{-(m-1)}}{a_{-m}} \cdot \frac{1}{z^2} - \dots,$$

woraus wegen (19,32) und (19,33)

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(k)} \frac{w'(z)}{w(z)} dz = m \quad (22,22)$$

folgt. In Verbindung mit (22,21) bzw. (22,22) zeigt dann (22,2), daß

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(C)} \frac{w'(z)}{w(z)} dz = N_p - N_n \quad (22,3)$$

gilt, falls N_p die Gesamtzahl aller in B' gelegenen Pole sowie N_n die Gesamtzahl aller in B' gelegenen Nullstellen der Funktion $w(z)$ bedeutet, und falls dabei sowohl jeder Pol als auch jede Nullstelle so oft gezählt wird, wie die betr. Ordnungszahl angibt.

Sei nunmehr $w(z)$ eine Funktion von z , die sich in dem Außengebiet κ' des mit dem Radius a um den Nullpunkt der Z -Ebene geschlagenen Kreises k

wird, falls C_1 eine beliebige, ganz in κ'_1 gelegene, den Kreis k_1 umschlingende geschlossene Kurve (vgl. Fig. 15) bedeutet. Wegen der Stetigkeitseigenschaften der Funktion $w(z)$ liefert dies unter Beachtung von (22,4) die Relation

$$w(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(k)} \frac{w(\zeta)}{\zeta - \frac{a^2}{\bar{z}}} d\zeta = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} w(\zeta) \cdot \frac{\zeta}{\zeta - \frac{a^2}{\bar{z}}} d\vartheta,$$

mit der (22,41) in

$$w(z) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} w(\zeta) \cdot \left\{ \frac{\zeta}{\zeta - \frac{a^2}{\bar{z}}} + \frac{\zeta}{z - \zeta} \right\} d\vartheta \quad (22,42)$$

übergeht. Wird die zu ζ konjugierte Zahl mit $\bar{\zeta}$ bezeichnet, so gilt $\zeta \cdot \bar{\zeta} = a^2$ oder $\zeta = \frac{a^2}{\bar{\zeta}}$, mithin

$$\frac{\zeta}{\zeta - \frac{a^2}{\bar{z}}} = \frac{\frac{1}{\bar{\zeta}}}{\frac{1}{\bar{\zeta}} - \frac{1}{\bar{z}}} = \frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{\zeta}}$$

und

$$\frac{\zeta}{\zeta - \frac{a^2}{\bar{z}}} + \frac{\zeta}{z - \zeta} = \frac{\bar{z}}{\bar{z} - \bar{\zeta}} + \frac{\zeta}{z - \zeta} = \frac{z \cdot \bar{z} - \zeta \cdot \bar{\zeta}}{(\bar{z} - \bar{\zeta}) \cdot (z - \zeta)} = \frac{|z|^2 - a^2}{|z - \zeta|^2},$$

wofür wir mit $z = r \cdot e^{i\Theta}$ auch

$$\frac{\zeta}{\zeta - \frac{a^2}{\bar{z}}} + \frac{\zeta}{z - \zeta} = \frac{r^2 - a^2}{r^2 + a^2 - 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta)} \quad (22,43)$$

schreiben können. Gemäß (22,42) und (22,43) gilt somit

$$w(z) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} w(\zeta) \cdot \frac{r^2 - a^2}{r^2 + a^2 - 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta)} d\vartheta, \quad (22,5)$$

woraus mit

$$\left. \begin{aligned} w(z) &= \varphi^*(r, \Theta) + i \cdot \psi^*(r, \Theta), \\ w(\zeta) &= \varphi^*(a, \vartheta) + i \cdot \psi^*(a, \vartheta) \end{aligned} \right\} \quad (22,51)$$

durch Trennung von Reellem und Imaginärem die beiden Relationen

$$\varphi^*(r, \Theta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \varphi^*(a, \vartheta) \cdot \frac{r^2 - a^2}{r^2 + a^2 - 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta)} d\vartheta \quad (22,52)$$

sowie

$$\psi^*(r, \Theta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \psi^*(a, \vartheta) \cdot \frac{r^2 - a^2}{r^2 + a^2 - 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta)} d\vartheta \quad (22,53)$$

folgen, die als die *Poissonschen Integralformeln für das Außengebiet eines Kreises* bezeichnet werden.

§ 23. Ein funktionentheoretisches Randwertproblem.

Wie die im vorhergehenden Paragraphen abgeleiteten *Poissonschen* Integralformeln (22,52) und (22,53) zeigen, lassen sich bei einer analytischen Funktion $w(z)$, von der wir von vornherein wissen, daß sie auf einem um den Nullpunkt der Z -Ebene als Mittelpunkt mit dem Radius a geschlagenen Kreis k stetig und im Außengebiet κ' von k überall regulär ist, die Werte ihres Real- bzw. Imaginärteils an jeder beliebigen Stelle von κ' aus den auf dem Kreis k angenommenen Randwerten des Real- bzw. Imaginärteils berechnen. Andererseits kann z. B. bei vorgegebenem Imaginärteil $\psi(x, y)$ der Realteil $\varphi(x, y)$ der in κ' regulären Funktion $w(z)$ bis auf eine willkürlich bleibende additive Konstante ermittelt werden. Denn aus der ersten der beiden *Cauchy-Riemannschen* Differentialgleichungen (17,9) folgt ja durch Integration

$$\varphi(x, y) = \int \frac{\partial \psi}{\partial y} dx + \varphi_1(y), \quad (23,1)$$

unter $\varphi_1(y)$ eine vorläufig noch unbestimmte Funktion von y verstanden, und hiermit liefert die zweite der beiden Gleichungen (17,9) die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial y} \cdot \int \frac{\partial \psi}{\partial y} dx + \frac{d\varphi_1}{dy} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (23,11)$$

aus der $\varphi_1(y)$ bis auf eine willkürlich bleibende additive Konstante bestimmt werden kann, womit unsere Behauptung bewiesen ist. Infolgedessen liegt jetzt offenbar die folgende Fragestellung nahe: Kann man, wenn eine auf dem oben erwähnten Kreis k stetige Funktion $\psi^*(a, \vartheta)$ vorgegeben ist, eine im Außengebiet κ' von k reguläre analytische Funktion $w(z)$ konstruieren, deren Imaginärteil $\psi(x, y) = \psi^*(r, \Theta)$ beim Übergang aus κ' auf k , d. h. also für $r \rightarrow a$ und $\Theta \rightarrow \vartheta_0$, unter ϑ_0 einen festen Wert von ϑ verstanden, den dort vorgeschriebenen Wert $\psi^*(a, \vartheta_0)$ annimmt? Man wird vermuten, daß diese Randwertaufgabe sich mit Hilfe des *Poissonschen*

Integrals (22,53) lösen läßt — eine Vermutung, deren Richtigkeit wir nunmehr beweisen wollen.

Zu diesem Zweck wäre natürlich zunächst zu zeigen, daß die durch (22,53) mit einer beliebig vorgegebenen stetigen Funktion $\psi^*(a, \vartheta)$ in Ansatz gebrachte Funktion $\psi^*(r, \Theta) = \psi(x, y)$ im Außengebiet κ' des Kreises k der Laplaceschen Differentialgleichung (17,91) genügt. Dies gelingt am einfachsten durch den Nachweis, daß die im Integranden von (22,53) als Faktor von $\psi^*(a, \vartheta)$ auftretende reelle Funktion

$$u(x, y) = u^*(r, \Theta) = \frac{r^2 - a^2}{r^2 + a^2 - 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta)} \quad (23,2)$$

den Realteil der in κ' , d. h. für $|z| > |\zeta|$, sicherlich regulären analytischen Funktion $\frac{z + \zeta}{z - \zeta}$ mit $\zeta = a \cdot e^{i\vartheta}$ darstellt. Tatsächlich wird nämlich

$$\frac{z + \zeta}{z - \zeta} = \frac{(z + \zeta) \cdot (\bar{z} - \bar{\zeta})}{(z - \zeta) \cdot (\bar{z} - \bar{\zeta})} = \frac{z \cdot \bar{z} - \zeta \cdot \bar{\zeta} + (\bar{z} \cdot \zeta - z \cdot \bar{\zeta})}{|z - \zeta|^2}$$

oder

$$\frac{z + \zeta}{z - \zeta} = \frac{r^2 - a^2 + (\bar{z} \cdot \zeta - z \cdot \bar{\zeta})}{r^2 + a^2 - 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta)},$$

und $\bar{z} \cdot \zeta - z \cdot \bar{\zeta}$ ist als Differenz zweier zueinander konjugiert komplexer Größen rein imaginär. Infolgedessen genügt die in (23,2) angeschriebene Funktion $u(x, y)$ in κ' der Laplaceschen Differentialgleichung, so daß sich durch Differentiation unter dem Integralzeichen das gleiche für die durch (22,53) dargestellte Funktion $\psi^*(r, \Theta) = \psi(x, y)$ ergibt.

Weiter wäre sodann zu zeigen, daß die Funktion (22,53) die Bedingung

$$\lim_{\substack{r \rightarrow a \\ \Theta \rightarrow \vartheta_0}} \psi^*(r, \Theta) = \psi^*(a, \vartheta_0) \quad (23,3)$$

erfüllt, wobei unter ϑ_0 wieder ein fester, zwischen 0 und 2π gelegener Wert von ϑ zu verstehen ist. Ist nun ε eine beliebig vorgegebene positive Größe, so läßt sich wegen der Stetigkeit der Randwerte $\psi^*(a, \vartheta)$ stets eine zweite positive Größe ω derart bestimmen, daß

$$|\psi^*(a, \vartheta) - \psi^*(a, \vartheta_0)| < \varepsilon \quad \text{für} \quad \vartheta_0 - \omega < \vartheta < \vartheta_0 + \omega \quad (23,31)$$

mit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega = 0 \quad (23,32)$$

gilt. Ferner muß aus demselben Grunde eine positive Zahl M existieren, so daß für jedes zwischen 0 und 2π gelegene ϑ

$$|\psi^*(a, \vartheta)| < M \quad (23,33)$$

bleibt.¹⁾ Wenden wir schließlich, was ja sicher zulässig ist, die *Poissonsche*

¹⁾ Denn $\psi^*(a, \vartheta)$ muß als eine in dem abgeschlossenen Intervall $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ stetige Funktion notwendigerweise beschränkt sein.

Integralformel (22,53) auf den Spezialfall $\psi^*(r, \Theta) = 1$ an, so erhalten wir die Relation

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - a^2}{r^2 + a^2 - 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta)} d\vartheta = 1, \quad (23,34)$$

die wir offenbar auch in der Form

$$J_1 + J_2 + J_3 = 1 \quad (23,4)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\vartheta_0 - \omega} \frac{r^2 - a^2}{r^2 + a^2 - 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta)} d\vartheta, \\ J_2 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\vartheta_0 - \omega}^{\vartheta_0 + \omega} \frac{r^2 - a^2}{r^2 + a^2 - 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta)} d\vartheta, \\ J_3 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\vartheta_0 + \omega}^{2\pi} \frac{r^2 - a^2}{r^2 + a^2 - 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta)} d\vartheta \end{aligned} \right\} \quad (23,41)$$

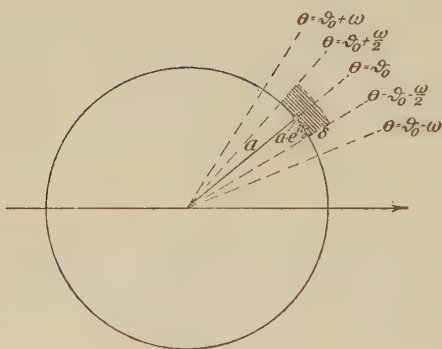


Fig. 16.

schreiben können.

Wir untersuchen jetzt das zweite der drei auf der linken Seite von (23,4) auftretenden Integrale, indem wir dabei die Variablen r und Θ auf das in Fig. 16 schraffierte, durch die Ungleichungen

$$\left. \begin{aligned} a < r < a + \delta, \\ \vartheta_0 - \frac{\omega}{2} < \Theta < \vartheta_0 + \frac{\omega}{2} \end{aligned} \right\} \quad (23,42)$$

gekennzeichnete Gebiet einschränken, unter δ eine sehr kleine positive, später noch näher zu fixierende Zahl verstanden.

Mit $\vartheta^* = \vartheta - \vartheta_0$ wird zunächst

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{r^2 - a^2}{2\pi} \cdot \int_{-\omega}^{+\omega} \frac{d\vartheta^*}{r^2 + a^2 - 2ar \cdot \cos\{(\Theta - \vartheta_0) - \vartheta^*\}} \\ &= \frac{r^2 - a^2}{2\pi} \cdot \int_{-\omega}^{+\omega} \frac{d\vartheta^*}{(r^2 + a^2) - 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta_0) \cdot \cos \vartheta^* - 2ar \cdot \sin(\Theta - \vartheta_0) \cdot \sin \vartheta^*} \end{aligned}$$

Führt man dann als neue Integrationsvariable $t = tg \frac{\vartheta^*}{2}$ ein, so wird

$$\sin \vartheta^* = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos \vartheta^* = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \frac{d\vartheta^*}{dt} = \frac{2}{1+t^2},$$

mithin

$$J_2 = \frac{r^2 - a^2}{\pi} \cdot \int_{-tg\left(\frac{\omega}{2}\right)}^{+tg\left(\frac{\omega}{2}\right)} \frac{dt}{N(t)}$$

mit

$$\begin{aligned} N(t) &= (r^2 + a^2) \cdot (1 + t^2) - 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta_0) \cdot (1 - t^2) - 2ar \cdot \sin(\Theta - \vartheta_0) \cdot 2t \\ &= \{r^2 + a^2 + 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta_0)\} t^2 - 4ar \cdot \sin(\Theta - \vartheta_0) \cdot t \\ &\quad + \{r^2 + a^2 - 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta_0)\} \\ &= \{r^2 + a^2 + 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta_0)\} \cdot \left\{ t^2 - \frac{4ar \cdot \sin(\Theta - \vartheta_0) \cdot t}{r^2 + a^2 + 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta_0)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(r^2 + a^2)^2 - 4a^2r^2 \cdot \cos^2(\Theta - \vartheta_0)}{\{r^2 + a^2 + 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta_0)\}^2} \right\} \\ &= \{r^2 + a^2 + 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta_0)\} \cdot \left\{ \left(t - \frac{2ar \cdot \sin(\Theta - \vartheta_0)}{r^2 + a^2 + 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta_0)} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(r^2 - a^2)^2}{\{r^2 + a^2 + 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta_0)\}^2} \right\} \\ &= \frac{(r^2 - a^2)^2}{r^2 + a^2 + 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta_0)} \cdot \left\{ \left[\frac{r^2 + a^2 + 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta_0)}{r^2 - a^2} \right]^2 \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(t - \frac{2ar \cdot \sin(\Theta - \vartheta_0)}{r^2 + a^2 + 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta_0)} \right)^2 + 1 \right\}. \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Substitution

$$\frac{r^2 + a^2 + 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta_0)}{r^2 - a^2} \cdot \left(t - \frac{2ar \cdot \sin(\Theta - \vartheta_0)}{r^2 + a^2 + 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta_0)} \right) = t^*$$

erhalten wir daher

$$J_2 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{*}^{t_1^*} \frac{dt^*}{t^{*2} + 1} = \frac{1}{\pi} \cdot \left\{ \arctg t_1^* - \arctg t_2^* \right\} \quad (23,43)$$

mit

$$t_1^* = \frac{1}{r^2 - a^2} \cdot \left\{ -2ar \cdot \sin(\Theta - \vartheta_0) + tg\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot \left[r^2 + a^2 + 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta_0) \right] \right\},$$

$$t_2^* = \frac{1}{r^2 - a^2} \cdot \left\{ -2ar \cdot \sin(\Theta - \vartheta_0) - tg\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot \left[r^2 + a^2 + 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta_0) \right] \right\},$$

wofür wir auch¹⁾

$$\left. \begin{aligned} t_1^* &= \frac{2ar \cdot \sin\left\{\frac{\omega}{2} - (\Theta - \vartheta_0)\right\} + (r^2 + a^2) \cdot \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{(r^2 - a^2) \cdot \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)}, \\ t_2^* &= - \frac{2ar \cdot \sin\left\{\frac{\omega}{2} + (\Theta - \vartheta_0)\right\} + (r^2 + a^2) \cdot \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{(r^2 - a^2) \cdot \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} \end{aligned} \right\} \quad (23,44)$$

schreiben können. Wegen der Vieldeutigkeit der Funktion $\arctg t^*$ müssen wir dabei die Bemerkung hinzufügen, daß wir die durch die Bedingung

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arctg t^* \leq +\frac{\pi}{2} \quad (23,45)$$

gekennzeichneten Hauptwerte benutzen wollen. Da gemäß (23,42)

$$0 < \sin\left\{\frac{\omega}{2} \pm (\Theta - \vartheta_0)\right\} < \sin \omega \text{ und } r > a \text{ gilt, so lehrt (23,44) zunächst,}$$

daß t_1^* beständig positiv, hingegen t_2^* beständig negativ sein muß; genauer ergibt sich²⁾

$$\begin{aligned} & \text{1) Es wird nämlich} \\ & -2ar \cdot \sin(\Theta - \vartheta_0) \pm tg\left(\frac{\omega}{2}\right) \cdot \{(r^2 + a^2) + 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta_0)\} \\ & = \frac{1}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} \left\{ -2ar \cdot \sin(\Theta - \vartheta_0) \cdot \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \pm 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta_0) \cdot \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \pm (r^2 + a^2) \cdot \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \right\} \\ & = \frac{1}{\cos\left(\frac{\omega}{2}\right)} \left\{ 2ar \cdot \sin\left[\pm \frac{\omega}{2} - (\Theta - \vartheta_0)\right] \pm (r^2 + a^2) \cdot \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \right\}. \end{aligned}$$

2) Um die obere (untere) Schranke des in (23,44) für t_1^* angegebenen Quotienten zu finden, wenn die Größen $(\Theta - \vartheta_0)$ und r den in (23,42) verzeichneten Einschränkungen unterliegen, hat man die obere (untere) Schranke des stets positiven Zählers durch die untere (obere) Schranke des stets positiven Nenners zu dividieren. So ergibt sich einerseits die Nicht-Existenz einer eigentlichen oberen Schranke (d. h. also $t_1^* < +\infty$), da die untere, durch $r = a$ gegebene Schranke des Nenners Null wird, während die obere Schranke des Zählers sicher positiv ausfällt. Andererseits ist die durch $\Theta - \vartheta_0 = +\frac{\omega}{2}$ sowie $r = a$ gegebene untere Schranke des Zählers gleich $2a^2 \cdot \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$, die obere Schranke des Nenners gleich $\{(a + \delta)^2 - a^2\} \cdot \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \sim 2a\delta \cdot \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$, woraus sich sofort die oben angegebene untere Schranke von t_1^* ergibt. Für t_2^* hingegen gilt genau das Umgekehrte, da diese Größe stets negativ ist.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{a \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\omega}{2} \right)}{\delta} < t_1^* < +\infty, \\
 & -\infty < t_2^* < - \frac{a \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\omega}{2} \right)}{\delta},
 \end{aligned}$$

so daß, da $\operatorname{arc tg} t^*$ in dem Intervall (23,45) eine monoton wachsende Funktion ist,

$$\left. \begin{aligned}
 \operatorname{arc tg} \left\{ \frac{a \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\omega}{2} \right)}{\delta} \right\} & < \operatorname{arc tg} t_1^* < \frac{\pi}{2}, \\
 -\frac{\pi}{2} & < \operatorname{arc tg} t_2^* < - \operatorname{arc tg} \left\{ \frac{a \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\omega}{2} \right)}{\delta} \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (23,46)$$

gilt. Nun wird aber

$$\operatorname{arc tg} \left\{ \frac{a \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\omega}{2} \right)}{\delta} \right\} = \frac{\pi}{2} - \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2},$$

sobald¹⁾

$$\delta = a \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\omega}{2} \right) \cdot \operatorname{tg} \left(\varepsilon \cdot \frac{\pi}{2} \right) \quad (23,47)$$

gewählt wird. Alsdann folgt gemäß (23,43) und (23,46)

$$1 - \varepsilon < J_2 < 1,$$

¹⁾ Soll nämlich

$$\operatorname{arc tg} \left\{ \frac{a \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\omega}{2} \right)}{\delta} \right\} = \frac{\pi}{2} - \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2}$$

werden, so muß

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{a \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\omega}{2} \right)}{\delta}$$

sein. Nun gilt aber

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \operatorname{ctg} \left(\varepsilon \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{\operatorname{tg} \left(\varepsilon \cdot \frac{\pi}{2} \right)},$$

so daß

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \left(\varepsilon \cdot \frac{\pi}{2} \right)} = \frac{a \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\omega}{2} \right)}{\delta}$$

und damit (23,47) folgt.

mithin

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_2 = 1, \quad (23,48)$$

woraus sich in Verbindung mit (23,4) die Relation

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (J_1 + J_3) = 0 \quad (23,49)$$

ergibt.

Nach diesen vorbereitenden Darlegungen läßt sich jetzt das tatsächliche Bestehen der Relation (23,3), die wir wegen (23,42) unter Beachtung von (23,32) und (23,47) auch in der Form

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi^*(r, \Theta) = \psi^*(a, \vartheta_0) \quad (23,5)$$

schreiben können, ohne Schwierigkeit beweisen. Zunächst nämlich wird gemäß (22,53) und (23,34)

$$\begin{aligned} \psi^*(r, \Theta) - \psi^*(a, \vartheta_0) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{\vartheta_0 - \omega} \left\{ \psi^*(a, \vartheta) - \psi^*(a, \vartheta_0) \right\} \cdot \frac{r^2 - a^2}{r^2 + a^2 - 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta)} d\vartheta \\ &+ \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\vartheta_0 - \omega}^{\vartheta_0 + \omega} \left\{ \psi^*(a, \vartheta) - \psi^*(a, \vartheta_0) \right\} \cdot \frac{r^2 - a^2}{r^2 + a^2 - 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta)} d\vartheta \\ &+ \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\vartheta_0 + \omega}^{2\pi} \left\{ \psi^*(a, \vartheta) - \psi^*(a, \vartheta_0) \right\} \cdot \frac{r^2 - a^2}{r^2 + a^2 - 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta)} d\vartheta, \end{aligned}$$

und hieraus erhält man durch Übergang zu den absoluten Beträgen, da für $r > a$

$$\frac{r^2 - a^2}{r^2 + a^2 - 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta)} > 0,$$

mithin

$$\left| \frac{r^2 - a^2}{r^2 + a^2 - 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta)} \right| = \frac{r^2 - a^2}{r^2 + a^2 - 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta)}$$

gilt, unter Beachtung von (23,31), (23,33) und (23,41) die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\psi^*(r, \Theta) - \psi^*(a, \vartheta_0)| &< 2M \cdot J_1 + \varepsilon \cdot J_2 + 2M \cdot J_3 \\ &= \varepsilon \cdot J_2 + 2M \cdot (J_1 + J_3), \end{aligned}$$

womit wegen (23,48) und (23,49) sofort (23,5) folgt.

Nachdem so gezeigt ist, daß sich mit Hilfe des Ansatzes (22,53) eine Funktion $\psi^*(r, \Theta) = \psi(x, y)$ konstruieren läßt, die im Außengebiet κ' des Kreises k der Laplaceschen Differentialgleichung (17,91) genügt, und die

überdies auf k die daselbst vorgeschriebenen Randwerte $\psi^*(a, \vartheta)$ annimmt, kann jetzt gemäß (23,1) und (23,11) mühelos eine in κ' reguläre analytische Funktion $w(z)$ ermittelt werden, die die verlangten, zu Beginn dieses Paragraphen formulierten Eigenschaften besitzt. Die Lösbarkeit unseres funktionentheoretischen Randwertproblems ist somit nachgewiesen.

§ 24. Einige Abbildungssätze.

In § 20 haben wir einige Beispiele konformer Abbildungen kennen gelernt, wie sie durch gewisse einfache analytische Funktionen vermittelt werden. Den Ausgangspunkt bildete dabei stets eine bekannte Funktion $\zeta = F(z)$, und unsere Untersuchungen verfolgten den Zweck, die Natur der durch die gerade ins Auge gefaßte Funktion besorgten Abbildung der Z -Ebene auf die Z -Ebene zu studieren. Es liegt nun offenbar der Gedanke nahe, die Fragestellung in der Weise umzukehren, daß man von einem in der Z -Ebene willkürlich vorgelegten Gebiet B sowie von einem in der Z -Ebene ebenfalls willkürlich vorgelegten Gebiet $\mathbf{B}$ ausgeht, und dann eine analytische Funktion ζ der komplexen Variablen z derart zu bestimmen sucht, daß durch sie gerade diese beiden Gebiete B und $\mathbf{B}$ umkehrbar eindeutig und konform aufeinander abgebildet werden. Selbstverständlich wird man sich bei einer solchen Aufgabe zunächst einmal davon überzeugen wollen, ob sie nicht mit Hilfe einer der hinsichtlich ihrer Abbildungseigenschaften bereits bekannten Funktionen gelöst werden kann; allein von vorneherein wird es doch wohl höchst fraglich erscheinen, ob im allgemeinen eine Lösung des Problems überhaupt möglich ist. Um so merkwürdiger muß somit ein Satz anmuten, den *Riemann* zuerst ausgesprochen und *Schwarz* zuerst streng bewiesen hat, der Satz nämlich, daß man zwei einfach zusammenhängende Gebiete stets umkehrbar eindeutig und konform aufeinander abbilden kann. Ohne uns hier auf den Beweis dieses *Fundamentalsatzes der Theorie der konformen Abbildung* einzulassen¹⁾, können wir unmittelbar erkennen, daß man sich dabei ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit auf die Untersuchung der Abbildung eines beliebigen Gebietes B der Z -Ebene auf ein bestimmtes, ein für allemal festgelegtes *Grundgebiet* G der Z -Ebene beschränken darf. Denn wenn man jedes Gebiet umkehrbar eindeutig und konform auf dieses Grundgebiet abbilden kann, so gibt es, falls ein Gebiet B in der Z -Ebene und ein beliebiges Gebiet $\mathbf{B}$ in der Z -Ebene vorgelegt sind, erstens eine Funktion $w = w(z)$, die das Gebiet B der Z -Ebene auf das Grundgebiet G der W -Ebene abbildet; zweitens aber gibt es eine Funktion $\zeta = F^*(w)$, die G wiederum — wegen der nach Voraussetzung bestehenden Umkehrbarkeit der Abbildung — auf $\mathbf{B}$ abbildet, und infolgedessen wird die Funktion $\zeta = F^*\{w(z)\} = F(z)$ die gewünschte Abbildung von B auf $\mathbf{B}$ besorgen müssen. Indem wir nun

¹⁾ Vgl. hierzu z. B. *L. Bieberbach*, Einführung in die konforme Abbildung (Sammlung Göschens Nr. 768), § 17.

als Grundgebiet G die *Einheitskreisfläche* wählen, können wir den genauen Inhalt des *Riemannschen Abbildungssatzes* folgendermaßen formulieren: *Ist B ein einfach zusammenhängendes, ganz im Inneren der Einheitskreisfläche der Z -Ebene gelegenes, den Nullpunkt $z = 0$ als inneren Punkt enthaltendes Gebiet, so existiert eine und nur eine in B analytische Funktion $\zeta = F(z)$, die dieses Gebiet B umkehrbar eindeutig und konform auf die Einheitskreisfläche der Z -Ebene derart abbildet, daß dabei der Punkt $z = 0$ in den Punkt $\zeta = 0$ übergeht und außerdem $F'(0) > 0$ gilt. In einer hinreichend kleinen Umgebung des Nullpunkts der Z -Ebene läßt diese Funktion demnach eine Potenzreihenentwicklung von der Form*

$$\zeta = F(z) = a_1 \cdot z + a_2 \cdot z^2 + a_3 \cdot z^3 + \cdots + a_v \cdot z^v + \cdots \quad (24,1)$$

mit $a_1 > 0$ zu. Ferner wird dabei die Berandung C von B umkehrbar eindeutig und stetig dem Einheitskreis der Z -Ebene zugeordnet.

Als eine einfache Folgerung des vorstehenden Satzes beweisen wir jetzt, daß eine und nur eine analytische Funktion $\zeta = f(z)$ existiert, durch die das in der Z -Ebene gelegene Außengebiet B' einer beschränkten geschlossenen Kurve C umkehrbar eindeutig und konform auf das Außengebiet K' eines in der Z -Ebene gelegenen Kreises k derart abgebildet wird, daß dabei der Punkt $z = \infty$ in den Punkt $\zeta = \infty$ übergeht sowie überdies die Relation $f'(\infty) = 1$ besteht. Diese Funktion läßt demnach im Außengebiet eines mit hinreichend großem Radius um den Nullpunkt $z = 0$ als Mittelpunkt geschlagenen Kreises der Z -Ebene eine Entwicklung von der Form

$$\zeta = f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \cdots + \frac{a_v}{z^v} + \cdots \quad (24,2)$$

zu, und die Größe des Radius a sowie die Lage des Mittelpunktes $\zeta = m$ des Kreises k der Z -Ebene sind bei dieser Normierung der Abbildungsfunktion völlig eindeutig bestimmt. Ferner wird dabei die Berandung C von B' umkehrbar eindeutig und stetig dem Kreis k der Z -Ebene zugeordnet. Ist nämlich z_0 ein innerer Punkt des von der Kurve C berandeten Innengebiets B , und wird eine positive Konstante ϱ derart gewählt, daß für alle auf C gelegenen Punkte z die Relation $|z - z_0| > \varrho$ besteht, so bewerkstelligt zunächst die

lineare Funktion $z^* = \frac{1}{\varrho} \cdot (z - z_0)$ eine umkehrbar eindeutige und konforme,

mit umkehrbar eindeutiger und stetiger Ränderzuordnung verbundene Abbildung von B' auf das Außengebiet $B^{*'}$ einer beschränkten geschlossenen Kurve C^* der Z^* -Ebene, deren Innengebiet B^* die ganze Einheitskreisfläche der Z^* -Ebene, mithin insbesondere den Nullpunkt $z^* = 0$ als inneren Punkt, enthält. Dann führt aber die Funktion

$$w = \frac{1}{z^*} = \frac{\varrho}{z - z_0} \quad (24,21)$$

das Außengebiet B' von C der Z -Ebene umkehrbar eindeutig und konform unter umkehrbar eindeutiger und stetiger Ränderzuordnung in ein solches Gebiet B_1 der W -Ebene über, das ganz im Inneren der Einheitskreisfläche der W -Ebene gelegen ist, und das den Nullpunkt $w = 0$, der den Bildpunkt von $z = \infty$ darstellt, als inneren Punkt enthält. Infolgedessen existiert auf Grund des *Riemannschen* Fundamentalsatzes eine und nur eine in B_1 analytische Funktion $w^* = F(w)$, die das Gebiet B_1 der W -Ebene und damit auch das Gebiet B' der Z -Ebene umkehrbar eindeutig und konform unter umkehrbar eindeutiger und stetiger Ränderzuordnung auf die Einheitskreisfläche der W^* -Ebene derart abbildet, daß dabei der Nullpunkt $w = 0$ der W -Ebene, mithin der Punkt $z = \infty$ der Z -Ebene, in den Nullpunkt $w^* = 0$ der W^* -Ebene übergeht, und außerdem die Beziehung $F'(0) > 0$ besteht. In einer hinreichend kleinen Umgebung der Stelle $w = 0$ gilt demnach gemäß (24,1) eine Potenzreihenentwicklung von der Form

$$w^* = \alpha_1 \cdot w + \alpha_2 \cdot w^2 + \alpha_3 \cdot w^3 + \dots + \alpha_\nu \cdot w^\nu + \dots$$

mit $\alpha_1 > 0$, wofür wir wegen (24,21) auch die im Außengebiet eines mit hinreichend großem Radius um z_0 als Mittelpunkt geschlagenen Kreises der Z -Ebene gültige Entwicklung

$$w^* = \frac{\varrho \cdot \alpha_1}{z - z_0} + \frac{\varrho^2 \cdot \alpha_2}{(z - z_0)^2} + \frac{\varrho^3 \cdot \alpha_3}{(z - z_0)^3} + \dots + \frac{\varrho^\nu \cdot \alpha_\nu}{(z - z_0)^\nu} + \dots$$

setzen können. Umordnung dieser Reihe gemäß (21,4), (21,7) und (21,71) liefert eine Reihe von der Form

$$w^* = \frac{\varrho \cdot \alpha_1}{z} + \frac{\beta_2}{z^2} + \frac{\beta_3}{z^3} + \dots + \frac{\beta_\nu}{z^\nu} + \dots, \quad (24,22)$$

die jetzt die Funktion w^* im Außengebiet eines passend gewählten Kreises der Z -Ebene mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt zur Darstellung bringt. Bilden wir nun die Einheitskreisfläche der W^* -Ebene und damit das Gebiet

B' der Z -Ebene durch die Funktion $t = \frac{1}{w^*}$ umkehrbar eindeutig und kon-

form unter umkehrbar eindeutiger und stetiger Ränderzuordnung auf das Außengebiet des Einheitskreises der T -Ebene ab, so geht $w^* = 0$, d. h. also $z = \infty$, in $t = \infty$ über, und gemäß (24, 22) ergibt sich die Entwicklung

$$\left. \begin{aligned} t &= \frac{1}{\frac{\varrho \cdot \alpha_1}{z} + \frac{\beta_2}{z^2} + \frac{\beta_3}{z^3} + \dots + \frac{\beta_\nu}{z^\nu} + \dots} \\ &= \frac{z}{\varrho \alpha_1} - \frac{\beta_2}{\varrho^2 \alpha_1^2} - \left(\frac{\beta_3}{\varrho^3 \alpha_1^3} - \frac{\beta_2^2}{\varrho^3 \alpha_1^3} \right) \cdot \frac{1}{z} - \dots \end{aligned} \right\} \quad (24,23)$$

Da $\varrho \cdot \alpha_1 > 0$ gilt, so führt die Funktion $\zeta^* = \varrho \alpha_1 \cdot t$ das Außengebiet des Einheitskreises der T -Ebene und damit auch das Gebiet B' der Z -Ebene

umkehrbar eindeutig und konform unter umkehrbar eindeutiger und stetiger Ränderzuordnung in das Außengebiet des mit dem Radius $a = \varrho \cdot a_1$ um den Nullpunkt der Z^* -Ebene als Mittelpunkt geschlagenen Kreises k^* über, wobei $\zeta^* = \infty$ der Bildpunkt von $t = \infty$, mithin von $z = \infty$ wird, und wegen (24,23) wird unter Einführung neuer Koeffizientenbezeichnungen

$$\zeta^* = z - \frac{\beta_2}{\varrho \cdot a_1} + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \cdots + \frac{a_\nu}{z^\nu} + \cdots.$$

Um dann schließlich die in unserem Satz verlangte Entwicklung von der Form (24,2) zu erhalten, haben wir als letzte umkehrbar eindeutige und

konforme Hilfsabbildung die durch die lineare Funktion $\zeta = \zeta^* + \frac{\beta_2}{\varrho \cdot a_1}$

besorgte Translation auszuführen, die als Bildgebiet des Außengebiets des Kreises k^* der Z^* -Ebene unter Festhaltung des unendlichfernen Punktes das Außengebiet desjenigen Kreises k der Z -Ebene liefert, der mit dem Radius

a um die Stelle $m = \frac{\beta_2}{\varrho \cdot a_1}$ als Mittelpunkt geschlagen ist. Hiermit ist dann

der oben ausgesprochene Satz in allen Stücken bewiesen.

Im Anschluß hieran werde als ein weiterer wichtiger Abbildungssatz das folgende Theorem behandelt: Sei

$$z = z(\zeta) = \zeta + \frac{b_1}{\zeta} + \frac{b_2}{\zeta^2} + \frac{b_3}{\zeta^3} + \cdots + \frac{b_n}{\zeta^n} \quad (24,3)$$

eine analytische Funktion von ζ , die den um $\zeta = m$ als Mittelpunkt mit dem Radius a geschlagenen Kreis k der Z -Ebene umkehrbar eindeutig und stetig in eine geschlossene, doppeltpunktfreie Kurve C der Z -Ebene überführt, und deren Ableitung $z'(\zeta)$ im ganzen Außengebiet κ' von k von Null verschieden ausfällt. Alsdann vermittelt diese Funktion eine umkehrbar eindeutige und konforme Abbildung des Außengebiets κ' von k auf das Außengebiet B' von C , falls der Nullpunkt der Z -Ebene im Inneren der von k berandeten Kreisfläche κ gelegen ist. Zum Beweis wählen wir ein beliebiges, dem Außengebiet B' von C angehörendes z_0 und wenden (22,11) auf die in B' sicherlich reguläre Funktion $w(z) = 1$ an. Dies liefert die Relation

$$1 = 1 - \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(C)} \frac{dz}{z - z_0}$$

oder

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(C)} \frac{dz}{z - z_0} = 0. \quad (24,31)$$

Da nun $z = z(\zeta)$ nach Voraussetzung auf der Kurve C umkehrbar eindeutig ist, so darf diese Substitution in (24,31) ausgeführt werden, womit

sich die Beziehung

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(k)} \frac{z'(\zeta)}{z(\zeta) - z_0} d\zeta = 0 \quad (24,32)$$

ergibt. Nun ist $z'(\zeta)$ die Ableitung der Funktion $z(\zeta) - z_0$, so daß gemäß (22,3)

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{(k)} \frac{z'(\zeta)}{z(\zeta) - z_0} d\zeta = N_p - N_n,$$

mithin wegen (24,32)

$$N_p - N_n = 0 \quad (24,33)$$

gilt, unter N_p die Gesamtzahl der Pole sowie unter N_n die Gesamtzahl der Nullstellen der Funktion $z(\zeta) - z_0$ im Außengebiet κ' des Kreises k verstanden. Soll aber $z = z(\zeta)$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung von κ' auf B' vermitteln, so muß $z(\zeta)$ jeden in B' gelegenen Wert z_0 einmal, aber auch nur einmal annehmen. Demnach muß alsdann die Funktion $z(\zeta) - z_0$ in κ' eine und nur eine einfache Nullstelle besitzen, mithin $N_n = 1$ sein. Hieraus folgt gemäß (24,33) $N_p = 1$, und diese Bedingung ist dann und nur dann erfüllt, falls der Nullpunkt der Z -Ebene im Inneren der von k berandeten Kreisfläche κ gelegen ist. Denn die Funktion $z(\zeta) - z_0$ besitzt ja wegen (24,3) in $\zeta = \infty$ einen Pol erster, hingegen in $\zeta = 0$ einen Pol n -ter Ordnung, und da natürlich $\zeta = \infty$ dem Gebiet κ' notwendigerweise angehören muß, so darf sich keinesfalls auch $\zeta = 0$ in κ' befinden.

§ 25. Zur Berechnung der Abbildungsfunktion bei der konformen Abbildung beschränkter Gebiete auf eine Kreisfläche.

An die Spitze der Darlegungen dieses Paragraphen, die sich eng an Untersuchungen von L. Bieberbach¹⁾ anlehnen, stellen wir den folgenden Satz: Sei B ein von einer beschränkten geschlossenen Kurve C berandetes Gebiet der Z -Ebene, das den Nullpunkt $z = 0$ als inneren Punkt enthält. Durch eine in B reguläre analytische Funktion $\zeta = F(z)$ mit

$$F(0) = 0 \text{ und } F'(0) = 1 \quad (25,1)$$

werde B umkehrbar eindeutig und konform auf ein beschränktes Gebiet B der Z -Ebene abgebildet. Dann liefert von sämtlichen derartigen Abbildungen diejenige ein Bildgebiet B mit möglichst kleinem Flächeninhalt, für die B eine Kreisfläche darstellt.

Um diesen Satz zu beweisen, beachten wir zunächst, daß auf Grund des Fundamentalsatzes der Theorie der konformen Abbildung eine und nur eine den Nebenbedingungen (25,1) genügende Funktion $F(z)$ existiert, die das

¹⁾ Vgl. L. Bieberbach, Rend. Circ. Mat. di Palermo 38, 1914.

Gebiet B umkehrbar eindeutig und konform auf eine gewisse Kreisfläche κ der Z -Ebene abbildet. Desgleichen existiert eine weitere derartige Funktion, die B umkehrbar eindeutig und konform auf irgendein anderes, also nicht-kreisflächenförmiges Gebiet $\mathbf{B}$ abbildet. Unser Satz behauptet dann, daß dabei der Flächeninhalt von $\mathbf{B}$ stets größer ausfällt, als der Flächeninhalt von κ . Da sich aber der Übergang von B zu $\mathbf{B}$ unter Einschaltung einer Hilfsebene auch so bewerkstelligen läßt, daß man zunächst B in κ transformiert und daraufhin κ auf $\mathbf{B}$ abbildet, so wird unser Satz bewiesen sein, sobald wir folgendes zu zeigen vermögen: *Wird eine Kreisfläche κ , die von einem mit dem Radius a um den Nullpunkt der Z -Ebene als Mittelpunkt gelegten Kreis berandet wird, durch eine die Bedingungen (25,1) erfüllende Funktion $\zeta = F(z)$ umkehrbar eindeutig und konform auf ein beschränktes Gebiet $\mathbf{B}$ der Z -Ebene abgebildet, so fällt der Flächeninhalt von $\mathbf{B}$, falls die Abbildungsfunktion von der identischen Transformation $\zeta = z$ verschieden ist, stets größer als der Flächeninhalt $a^2\pi$ des Grundgebiets κ der Z -Ebene aus.*

Dies läßt sich nun tatsächlich auf einfache Weise als zutreffend erkennen. Setzen wir nämlich

$$\zeta = F(z) = \xi(x, y) + i \cdot \eta(x, y),$$

so wird auf Grund der *Cauchy-Riemannschen* Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

mithin

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2,$$

wofür wir wegen

$$F'(z) = \frac{d\zeta}{dz} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

auch

$$D(x, y) = |F'(z)|^2 = F'(z) \cdot \overline{F'(z)}$$

schreiben können, unter $\overline{F'(z)}$ den zu $F'(z)$ konjugierten Wert verstanden. Infolgedessen erhalten wir für den Flächeninhalt σ des Gebiets $\mathbf{B}$ der Z -Ebene unter Anwendung der Regel für die Transformation mehrfacher Integrale¹⁾ den Ausdruck

$$\sigma = \iint_{(\mathbf{B})} d\xi d\eta = \iint_{(\kappa)} |D(x, y)| dx dy = \iint_{(\kappa)} F'(z) \cdot \overline{F'(z)} dx dy$$

¹⁾ Vgl. Fußnote 2) auf S. 28.

oder mit Einführung von Polarkoordinaten durch die Substitutionen
 $x = r \cdot \cos \Theta$, $y = r \cdot \sin \Theta$, $z = r \cdot e^{i\Theta}$

$$\sigma = \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} F'(r \cdot e^{i\Theta}) \cdot \overline{F'(r \cdot e^{i\Theta})} d\Theta. \quad (25,2)$$

Wegen (25,1) läßt sich aber die in κ reguläre Funktion $F(z) \neq z$ in eine in κ absolut und gleichmäßig konvergierende Reihe von der Form

$$F(z) = z + A_2 \cdot z^2 + A_3 \cdot z^3 + \dots + A_\nu \cdot z^\nu + \dots \quad (25,21)$$

mit nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten A_ν entwickeln, so daß

$$F'(z) = 1 + 2 A_2 \cdot z + 3 A_3 \cdot z^2 + \dots + \nu \cdot A_\nu \cdot z^{\nu-1} + \dots,$$

mithin

$$F'(r \cdot e^{i\Theta}) = 1 + 2r A_2 \cdot e^{i\Theta} + 3r^2 A_3 \cdot e^{i \cdot 2\Theta} + \dots + \nu \cdot r^{\nu-1} A_\nu \cdot e^{i \cdot (\nu-1)\Theta} + \dots$$

sowie

$$\overline{F'(r \cdot e^{i\Theta})} = 1 + 2r \overline{A_2} \cdot e^{-i\Theta} + 3r^2 \overline{A_3} \cdot e^{-i \cdot 2\Theta} + \dots + \nu \cdot r^{\nu-1} \overline{A_\nu} \cdot e^{-i \cdot (\nu-1)\Theta} + \dots$$

wird¹⁾. Trägt man diese Entwicklungen in (25,2) ein, multipliziert aus und integriert gliedweise nach Θ , so ergibt sich unter Beachtung der Relation

$$\int_0^{2\pi} e^{i\nu\Theta} d\Theta = \frac{1}{i\nu} \cdot \left\{ e^{2\pi i \cdot \nu} - 1 \right\} = 0 \quad (\nu = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \quad (25,22)$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} \sigma &= 2\pi \cdot \int_0^a \left\{ 1 + 4r^2 \cdot |A_2|^2 + 9r^4 \cdot |A_3|^2 + \dots \right\} r dr \\ &= 2\pi \cdot \int_0^a \left\{ r + \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu^2 \cdot |A_\nu|^2 \cdot r^{2\nu-1} \right\} dr, \end{aligned}$$

aus der durch Ausführung der Integration

$$\sigma = a^2 \pi + 2\pi \cdot \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\nu^2 \cdot |A_\nu|^2 \cdot a^{2\nu}}{2\nu}$$

oder

$$\sigma = a^2 \pi + \pi \cdot \sum_{\nu=2}^{\infty} \nu \cdot |A_\nu|^2 \cdot a^{2\nu} \quad (25,23)$$

folgt. Hiermit ist aber bereits alles bewiesen, da ja die Summanden der auf der rechten Seite dieser Gleichung auftretenden Summe für alle $A_\nu \neq 0$ sämtlich wesentlich positive, also von Null verschiedene Größen sind.

¹⁾ Durch Überstreichen wird hierbei wieder, wie wir es stets tun werden, der Übergang zu den konjugierten Größen gekennzeichnet.

Auf Grund der vorstehend gewonnenen Ergebnisse läßt sich jetzt diejenige Funktion $F(z)$ — nach wie vor unter Berücksichtigung der Bedingungen (25,1) —, die das eingangs erwähnte Gebiet B der Z -Ebene umkehrbar-eindeutig und konform auf eine Kreisfläche κ der Z -Ebene abbildet, dadurch kennzeichnen, daß sie unter allen analytischen, in B regulären Funktionen $F(z)$ dem über B erstreckten Flächenintegral

$$\sigma = \iint_{(B)} F'(z) \cdot \overline{F'(z)} \, dx \, dy \quad (25,3)$$

den kleinsten Wert erteilt. Um nun diese Funktion $F(z)$ für ein beliebig vorgelegtes Gebiet B tatsächlich herzustellen, wollen wir sie durch Polynome von der Form

$$F_n(z) = z + A_2^{(n)} \cdot z^2 + A_3^{(n)} \cdot z^3 + \dots + A_n^{(n)} \cdot z^n \quad (25,31)$$

zu approximieren versuchen, und zwar derart, daß jedes $F_n(z)$ unter allen Polynomen vom gleichen Grad n , die die für $z=0$ in (25,1) geforderten Eigenschaften besitzen, dem Integral

$$\sigma^{(n)} = \iint_{(B)} F_n'(z) \cdot \overline{F_n'(z)} \, dx \, dy \quad (25,32)$$

den kleinsten Wert erteilt. Da ist natürlich zunächst die Frage zu entscheiden, ob ein solches Polynom $F_n(z)$ überhaupt existiert. Da $z=0$ ein innerer Punkt von B ist, so gibt es eine um $z=0$ als Mittelpunkt mit einem gewissen Radius a_1 gelegte Kreisfläche κ_1 , die ganz dem Gebiet B angehört. Der Flächeninhalt des durch (25,31) in der Z -Ebene erhaltenen Bildgebiets $B_1^{(n)}$ von κ_1 ist gemäß (25,23) durch

$$a_1^2 \pi + \pi \cdot \sum_{v=2}^n v \cdot |A_v^{(n)}|^2 a_1^{2v} \quad (25,33)$$

gegeben, und da als Approximations-Polynome $F_n(z)$ nur solche Polynome brauchbar sind, die als Bild der Kreisfläche κ_1 der Z -Ebene ein solches Gebiet $B_1^{(n)}$ der Z -Ebene liefern, dessen Flächeninhalt kleiner als der nach Voraussetzung endliche Flächeninhalt des Grundgebiets B ist, so muß der in (25,33) angeschriebene Ausdruck für die in Betracht kommenden Polynome nach oben beschränkt sein. Dies besagt für die Koeffizienten $A_v^{(n)}$ ($v=2, 3, \dots, n$) dieser Polynome, daß ihr absoluter Betrag unter einer festen positiven Schranke bleiben muß. Andererseits besitzen natürlich die Flächeninhalte der durch (25,31) in der Z -Ebene gelieferten Bildgebiete B_n des in der Z -Ebene befindlichen Grundgebiets B für alle zulässigen Polynome $F_n(z)$ gleichen Grades eine von Null verschiedene positive untere Grenze, da sie ja z. B. sämtlich größer als der von Null verschiedene Flächeninhalt der in B enthaltenen Kreisfläche κ_1 sein müssen. Wählen wir nun eine Folge solcher Polynome n -ten Grades derart, daß die Flächeninhalte der zugehörigen Bildgebiete $B^{(n)}$ gegen diese untere Grenze konvergieren, und daß gleichzeitig jeder der $n-1$

Koeffizienten $A_\nu^{(n)}$ ($\nu = 2, 3, \dots, n$) einem bestimmten Grenzwert zustrebt, so konvergiert diese Folge in einer Kreisfläche, die das Grundgebiet B ganz im Inneren enthält, gleichmäßig gegen ein Grenz-Polynom n -ten Grades. Wegen der Gleichmäßigkeit der Konvergenz muß aber der Inhalt des von diesem Grenz-Polynom in der Z -Ebene gelieferten Bildgebiets von B jener unteren Grenze der Inhalte der Gebiete $B^{(n)}$ gleich sein, und damit ist die Existenz eines Polynoms $F_n(z)$ mit der oben postulierten Minimum-Eigenschaft bewiesen.

Nun könnte es an und für sich natürlich zwei oder gar noch mehr „Minimalpolynome“ n -ten Grades geben. Daß diese Möglichkeit jedoch ausgeschlossen ist, wird sich sofort erweisen, wenn wir uns jetzt mit der Aufgabe befassen, ein solches Minimalpolynom n -ten Grades wirklich herzustellen. Dies gelingt sehr einfach auf folgende Weise. Sei $F_n(z)$ das gesuchte Minimalpolynom, und sei $g(z)$ ein Hilfspolynom von höchstens n -tem Grade. Dann ist, unter $\varepsilon = \alpha + i\beta$ einen komplexen Parameter verstanden, auch die Funktion

$$F_n(z) + \varepsilon \cdot g(z)$$

ein Polynom n -ten Grades, und das zu diesem Polynom gehörige Flächenintegral (25,32) wird durch

$$\left. \begin{aligned} J(\alpha, \beta) &= \iint_{(B)} \{ F'_n(z) + \varepsilon \cdot g'(z) \} \cdot \{ \overline{F'_n(z)} + \bar{\varepsilon} \cdot \overline{g'(z)} \} dx dy \\ &= \iint_{(B)} \{ F'_n(z) + (\alpha + i\beta) \cdot g'(z) \} \cdot \{ \overline{F'_n(z)} + (\alpha - i\beta) \cdot \overline{g'(z)} \} dx dy \end{aligned} \right\} \quad (25,34)$$

als eine reelle Funktion der beiden reellen Variablen α und β dargestellt, die für $\alpha = \beta = 0$ ein Minimum liefern muß. Dann muß aber auf Grund bekannter Regeln der Differentialrechnung¹⁾

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=\beta=0} = 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial J}{\partial \beta} \right)_{\alpha=\beta=0} = 0, \quad (25,35)$$

ferner

$$\left(\frac{\partial^2 J}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{\partial^2 J}{\partial \beta^2} \right)_{\alpha=\beta=0} - \left[\left(\frac{\partial^2 J}{\partial \alpha \partial \beta} \right)_{\alpha=\beta=0} \right]^2 > 0 \quad (25,361)$$

sowie

$$\left(\frac{\partial^2 J}{\partial \alpha^2} \right)_{\alpha=\beta=0} > 0 \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial^2 J}{\partial \beta^2} \right)_{\alpha=\beta=0} > 0 \quad (25,362)$$

gelten. Gemäß (25,34) wird nun

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha} &= \iint_{(B)} g'(z) \cdot \{ \overline{F'_n(z)} + (\alpha - i\beta) \cdot \overline{g'(z)} \} dx dy \\ &+ \iint_{(B)} \overline{g'(z)} \cdot \{ F'_n(z) + (\alpha + i\beta) \cdot g'(z) \} dx dy, \end{aligned}$$

¹⁾ Vgl. z. B. H. v. Mangoldt, Einführung in die höhere Mathematik Bd. II, Nr. 120.

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \beta} &= i \cdot \iint_{(B)} g'(z) \cdot \overline{\{F'_n(z) + (a - i\beta) \cdot g'(z)\}} dx dy \\ &\quad - i \cdot \iint_{(B)} \overline{g'(z)} \cdot \{F'_n(z) + (a + i\beta) \cdot g'(z)\} dx dy, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \alpha^2} = \iint_{(B)} g'(z) \cdot \overline{g'(z)} dx dy + \iint_{(B)} \overline{g'(z)} \cdot g'(z) dx dy = 2 \cdot \iint_{(B)} g'(z) \cdot \overline{g'(z)} dx dy,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J}{\partial \beta^2} &= -i^2 \cdot \iint_{(B)} g'(z) \cdot \overline{g'(z)} dx dy - i^2 \cdot \iint_{(B)} \overline{g'(z)} \cdot g'(z) dx dy \\ &= 2 \cdot \iint_{(B)} g'(z) \cdot \overline{g'(z)} dx dy, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \alpha \partial \beta} = -i \cdot \iint_{(B)} g'(z) \cdot \overline{g'(z)} dx dy + i \cdot \iint_{(B)} \overline{g'(z)} \cdot g'(z) dx dy = 0,$$

so daß wir gemäß (25,35)

$$\iint_{(B)} g'(z) \cdot \overline{F'_n(z)} dx dy = 0 \quad (25,37)$$

und

$$\iint_{(B)} \overline{g'(z)} \cdot F'_n(z) dx dy = 0 \quad (25,38)$$

sowie gemäß (25,361) und (25,362)

$$\iint_{(B)} g'(z) \cdot \overline{g'(z)} dx dy > 0 \quad (25,39)$$

fordern müssen. Wegen $g'(z) \cdot \overline{g'(z)} = |g'(z)|^2 > 0$ ist zunächst die Bedingung (25,39) stets erfüllt. Die Gleichungen (25,37) bzw. (25,38) aber können für beliebig gewähltes $g(z)$ nach Einführung des in (25,31) angeschriebenen Ausdrucks zur Bestimmung der $n-1$ komplexen Koeffizienten $A_\nu^{(n)}$ des Minimalpolynoms $F_n(z)$ dienen¹⁾. Daß diese Gleichungen lösbar sind, ist durch unseren Existenzbeweis für das Minimalpolynom $F_n(z)$ sichergestellt. Daß sie lediglich ein einziges Lösungssystem $A_\nu^{(n)}$ besitzen, sieht man folgendermaßen ein. Angenommen, es gäbe zwei Lösungen, d. h. also zwei voneinander verschiedene Minimalpolynome $F_n^{(1)}(z)$ und $F_n^{(2)}(z)$. Dann können wir für das oben eingeführte Hilfspolynom $g(z)$ insbesondere die Funktion $F_n^{(2)}(z) - F_n^{(1)}(z)$ wählen, und der gemäß (25,32) in Analogie zu (25,34) gebildete Ausdruck

$$\begin{aligned} J^*(\eta) &= \iint_{(B)} \{F_n^{(1)'}(z) + \eta \cdot [F_n^{(2)'}(z) - F_n^{(1)'}(z)]\} \\ &\quad \cdot \{\overline{F_n^{(1)'}(z)} + \eta \cdot [\overline{F_n^{(2)'}(z)} - \overline{F_n^{(1)'}(z)}]\} dx dy \end{aligned}$$

¹⁾ Man beachte, daß (25,37) und (25,38) zwei zueinander konjugierte Gleichungen darstellen, mithin miteinander für beliebiges $g(z)$ verträglich sind.

müßte dann, als Funktion des reellen Parameters η betrachtet, zwei (relative) Minima besitzen, nämlich ein erstes an der Stelle $\eta = 0$ sowie ein zweites an der Stelle $\eta = 1$. Dies würde jedoch besagen, daß an einer gewissen, der Bedingung $0 < \eta_0 < 1$ genügenden Stelle $\eta = \eta_0$ ein Maximum der Funktion $J^*(\eta)$ liegen, mithin an dieser Stelle die durch

$$\begin{aligned} \frac{d^2 J^*}{d\eta^2} &= 2 \cdot \int_{(B)} \int \{F_n^{(2)'}(z) - F_n^{(1)'}(z)\} \cdot \{\overline{F_n^{(2)'}}(z) - \overline{F_n^{(1)'}}(z)\} dx dy \\ &= 2 \cdot \int_{(B)} \int |F_n^{(2)'}(z) - F_n^{(1)'}(z)|^2 dx dy \end{aligned}$$

gegebene zweite Ableitung von $J^*(\eta)$ einen negativen Wert annehmen müßte, was wegen des positiven Integranden unmöglich ist. Es kann demnach kein Maximum von $J^*(\eta)$ geben, mithin auch keine zwei Minima dieser Funktion, und damit ist der Existenzbeweis für ein und nur ein Minimalpolynom $F_n(z)$ abgeschlossen.

Um schließlich die Koeffizienten $A_v^{(n)}$ von $F_n(z)$ zu ermitteln, können wir in (25,37) bzw. (25,38) — nach Einführung von (25,31) — für $g(z)$ der Reihe nach die speziellen Funktionen $z^2, z^3, z^4, \dots, z^n$ wählen. Setzen wir dabei zur Abkürzung

$$\iint_{(B)} z^\mu \cdot \overline{z}^\nu dx dy = \tau_{\mu\nu}, \quad (25,4)$$

so liefert (25,37) das Gleichungssystem

[illegible]

desgleichen (25,38) das Gleichungssystem

$$\left. \begin{aligned} &2\tau_{01} + 2 \cdot 2 \cdot \tau_{11} \cdot A_2^{(n)} + 2 \cdot 3 \cdot \tau_{21} \cdot A_3^{(n)} + \dots + 2 \cdot n \cdot \tau_{(n-1)1} \cdot A_n^{(n)} = 0, \\ &3\tau_{02} + 3 \cdot 2 \cdot \tau_{12} \cdot A_2^{(n)} + 3 \cdot 3 \cdot \tau_{22} \cdot A_3^{(n)} + \dots + 3 \cdot n \cdot \tau_{(n-1)2} \cdot A_n^{(n)} = 0, \\ &\dots\dots\dots \\ &n\tau_{0(n-1)} + n \cdot 2 \cdot \tau_{1(n-1)} \cdot A_2^{(n)} + n \cdot 3 \cdot \tau_{2(n-1)} \cdot A_3^{(n)} + \dots \\ &\qquad\qquad\qquad + n \cdot n \cdot \tau_{(n-1)(n-1)} \cdot A_n^{(n)} = 0, \end{aligned} \right\} (25,42)$$

und jedes dieser beiden Systeme von $n - 1$ linearen Gleichungen ist zur Berechnung der $n - 1$ komplexen Unbekannten $A_v^{(n)}$ ausreichend.¹⁾

¹⁾ Vgl. die letzte Fußnote.

Nachdem somit die Existenz der Minimalpolynome $F_n(z)$ erwiesen ist, wäre nunmehr noch der Nachweis zu führen, daß die Folge der $F_n(z)$ für jeden unserem Grundgebiet B der Z -Ebene angehörnden Wert von z mit unbegrenzt wachsendem n gleichmäßig gegen diejenige Funktion $F(z)$ konvergiert, die das Gebiet B umkehrbar-eindeutig und konform auf eine Kreisfläche κ der Z -Ebene abbildet. Zu diesem Zweck wäre zunächst zu zeigen, daß die zugehörige Folge der durch (25,32) gegebenen Flächeninhalte $\sigma^{(n)}$ gegen das durch (25,3) dargestellte absolute Minimum σ konvergiert, und daraus wäre dann auf die gleichmäßige Konvergenz der $F_n(z)$ gegen $F(z)$ zu schließen. Wegen der Weitläufigkeit dieses Beweises wollen wir jedoch auf seine Wiedergabe verzichten¹⁾, und wir dürfen dies um so eher tun, als sich bereits die vorstehend gemachten Darlegungen als für unsere Zwecke ausreichend erweisen werden.

§ 26. Der Faber-Bieberbachsche Flächensatz.

Sei

$$z = z(\zeta) = Z(\zeta^*) = \zeta^* + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\zeta^*} + \frac{\alpha_2}{\zeta^{*2}} + \cdots + \frac{\alpha_\nu}{\zeta^{*\nu}} + \cdots, \quad (26,1)$$

wobei zur Vereinfachung

$$\zeta^* = \zeta - m \quad (26,11)$$

gesetzt ist, eine im Außengebiet κ' des mit dem Radius a um $\zeta = m$ als Mittelpunkt geschlagenen Kreises k der Z -Ebene analytische Funktion von ζ , durch die κ' umkehrbar eindeutig und konform auf das Außengebiet B' einer beschränkten geschlossenen Kurve C der Z -Ebene abgebildet werde. Dann ist offenbar der Flächeninhalt σ des von C berandeten Innengebiets B durch²⁾

$$\sigma = \frac{1}{2} \int_{(C)} |z(\zeta)| \cdot \sin \omega \cdot |dz| \quad (26,2)$$

gegeben, falls (vgl. Fig. 17) ω denjenigen Winkel mißt, um den die vom Nullpunkt der Z -Ebene ausgehende, durch den auf C gelegenen Punkt z hindurchgelegte Halbgerade G in positiver Richtung gedreht werden muß, um mit der Richtung der in z an C gelegten Tangente t zusammenzufallen. Ist ω_2 der Neigungswinkel dieser Tangente t gegen die positive Richtung der reellen Achse, so wird zunächst

$$\omega = \omega_2 - \arg z(\zeta). \quad (26,21)$$

¹⁾ Vgl. hierzu *L. Bieberbach*, I. c.

²⁾ Man beachte, daß dieser Flächeninhalt gegeben ist durch den Grenzwert der Summe der Flächeninhalte derjenigen „elementaren“ Dreiecksflächen, die von den vom Nullpunkt der Z -Ebene ausgehenden Radiivektoren und den „Bogenelementen“ der Kurve C berandet werden. Aus dieser Bemerkung folgt dann unmittelbar der Ansatz (26,2), da ja der Inhalt einer Dreiecksfläche durch das halbe Produkt der Längen zweier Seiten und des Sinus des von diesen beiden Seiten eingeschlossenen Winkels gegeben ist.

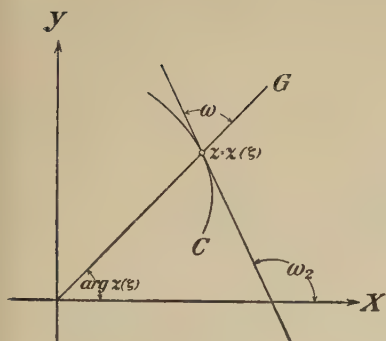


Fig. 17.

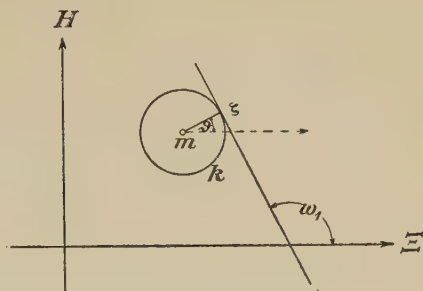


Fig. 18.

Und da (vgl. Fig. 18) der Neigungswinkel ω_1 der in $\zeta = m + a \cdot e^{i\vartheta}$ an den Kreis k der Z -Ebene gelegten Tangente gegen die positive Richtung der reellen Achse unter Beachtung von (26,11) durch

$$\omega_1 = \vartheta + \frac{\pi}{2} = \arg \zeta^* + \arg i = \arg (i \cdot \zeta^*)$$

gegeben ist, so gilt gemäß (20,15)

$$\arg z'(\zeta) = \omega_2 - \omega_1 = \omega_2 - \arg (i \cdot \zeta^*)$$

oder

$$\omega_2 = \arg z'(\zeta) + \arg (i \cdot \zeta^*) = \arg \{ i \cdot \zeta^* \cdot z'(\zeta) \}.$$

Setzt man dies in (26,21) ein, so wird

$$\omega = \arg \{ i \cdot \zeta^* \cdot z'(\zeta) \} - \arg z(\zeta) = \arg \frac{i \cdot \zeta^* \cdot z'(\zeta)}{z(\zeta)},$$

so daß sich wegen

$$\cos(\arg z) + i \cdot \sin(\arg z) = \frac{z}{|z|}$$

die Beziehung

$$\cos \omega + i \cdot \sin \omega = \frac{i \cdot \zeta^* \cdot z'(\zeta)}{z(\zeta) \cdot \left| \frac{i \cdot \zeta^* \cdot z'(\zeta)}{z(\zeta)} \right|} \quad (26,22)$$

ergibt. Führen wir demnach vorübergehend den Ausdruck

$$\tau = \frac{1}{2} \cdot \int_{(C)} |z(\zeta)| \cdot \cos \omega \, |dz|$$

ein, so gilt gemäß (26,2) und (26,22)

$$\tau + i \cdot \sigma = \frac{1}{2} \cdot \int_{(C)} |z(\zeta)| \cdot \{ \cos \omega + i \cdot \sin \omega \} |dz| = \frac{i}{2} \cdot \int_{(C)} \frac{|z(\zeta)|^2 \cdot \zeta^* \cdot z'(\zeta)}{z(\zeta) \cdot | \zeta^* \cdot |z'(\zeta)|} |dz|,$$

wofür wir, indem wir ϑ als Integrationsvariable wählen und die Relation

$$\left| \frac{dz}{d\vartheta} \right| = \left| \frac{dz}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{d\vartheta} \right| = |z'(\zeta)| \cdot |i a e^{i\vartheta}| = |z'(\zeta)| \cdot |\zeta^*|$$

beachten¹⁾, auch

$$\tau + i\sigma = \frac{i}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \zeta^* \cdot \overline{z(\zeta)} \cdot z'(\zeta) d\vartheta \quad (26,23)$$

schreiben können, da ja $|z(\zeta)|^2 = z(\zeta) \cdot \overline{z(\zeta)}$ zu setzen ist. Gemäß (26,1) wird aber

$$\overline{z(\zeta)} = \overline{\zeta^*} \cdot \left(1 + \frac{\overline{a_0}}{\overline{\zeta^*}} + \frac{\overline{a_1}}{\overline{\zeta^*}^2} + \frac{\overline{a_2}}{\overline{\zeta^*}^3} + \dots + \frac{\overline{a_\nu}}{\overline{\zeta^*}^{\nu+1}} + \dots \right),$$

$$z'(\zeta) = 1 - \frac{a_1}{\zeta^*{}^2} - \frac{2a_2}{\zeta^*{}^3} - \dots - \frac{\nu \cdot a_\nu}{\zeta^*{}^{\nu+1}} - \dots,$$

so daß wir mit Benutzung einiger neuer Koeffizientenbezeichnungen

$$\zeta^* \cdot \overline{z(\zeta)} \cdot z'(\zeta) = a^2 \cdot \left\{ 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu \cdot |a_\nu|^2}{a^{2 \cdot (\nu+1)}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu \cdot e^{i \cdot \nu \vartheta} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu \cdot e^{-i \cdot \nu \vartheta} \right\}$$

erhalten. Einführung dieses Ausdrucks in (26,23) liefert nach gliedweiser Integration unter Beachtung von (25,22)

$$\tau + i\sigma = i \cdot a^2 \pi \cdot \left\{ 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu \cdot |a_\nu|^2}{a^{2 \cdot (\nu+1)}} \right\},$$

womit sich durch Trennung von Reellem und Imaginärem für den Flächeninhalt σ des Innengebiets B

$$\sigma = a^2 \pi \cdot \left\{ 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu \cdot |a_\nu|^2}{a^{2 \cdot (\nu+1)}} \right\} \quad (26,24)$$

ergibt. Nun kann aber σ als Flächeninhalt niemals negative Werte annehmen, so daß gemäß (26,24) die Relation

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu \cdot |a_\nu|^2}{a^{2 \cdot (\nu+1)}} \leq 1 \quad (26,3)$$

bestehen muß. Diese Abschätzungsformel für die absoluten Beträge der in (26,1) auftretenden Koeffizienten a_ν ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) wollen wir als den

¹⁾ Denn wegen $\zeta - m = a \cdot e^{i\vartheta}$ wird ja $|i a e^{i\vartheta}| = |\zeta - m|$, wofür sich wegen (26,11) auch $|\zeta^*|$ schreiben läßt.

Faber-Bieberbachschen Flächensatz bezeichnen. Insbesondere gilt natürlich¹⁾

$$\frac{|\alpha_1|^2}{a^4} \leq 1$$

oder

$$|\alpha_1| \leq a^2, \quad (26,31)$$

da ja sämtliche Summanden der Summe (26,3) positive Zahlen sind.

Wird unter denselben Voraussetzungen wie zuvor durch

$$z = z(\zeta) = Z(\zeta^*) = \zeta^* + \beta_0 + \frac{\beta_1}{\zeta^*} + \frac{\beta_2}{\zeta^{*2}} + \cdots + \frac{\beta_\nu}{\zeta^{*\nu}} + \cdots \quad (26,4)$$

eine analytische Funktion von ζ dargestellt, bei der das durch sie in der Z -Ebene gelieferte Bildgebiet B' von κ' den Nullpunkt $z = 0$ nicht enthält, die also mit anderen Worten in κ' beständig von Null verschieden bleibt, so ist, wie wir nunmehr zeigen wollen, der Koeffizient β_0 der Einschränkung

$$|\beta_0| \leq 2a \quad (26,41)$$

unterworfen. Zu diesem Zweck beweisen wir zunächst, daß alsdann die durch

$$t = t(\zeta^*) = \sqrt{Z(\zeta^{*2})} \quad (26,5)$$

definierte Funktion $t(\zeta^*)$, wobei ein bestimmter Zweig der Quadratwurzel (vgl. S. 75) zu wählen ist, eine umkehrbar eindeutige und konforme Abbildung des Außengebiets κ'_1 des durch $|\zeta - m| = \sqrt{a}$ gegebenen Kreises k_1 der Z -Ebene auf das den Nullpunkt $t = 0$ nicht enthaltende Außengebiet B'_1 einer gewissen beschränkten geschlossenen Kurve C_1 der T -Ebene vermittelt. Da $Z(\zeta^*)$ für $|\zeta - m| > a$ regulär und von Null verschieden ist, so muß sicherlich $t(\zeta^*)$ für $|\zeta - m| > \sqrt{a}$ regulär und von Null verschieden sein. Demnach bleibt für den Beweis unserer Behauptung lediglich der Nachweis übrig, daß aus dem Bestehen der Gleichung

$$t(\zeta^*_1) = t(\zeta^*_2) \quad (26,51)$$

mit $|\zeta^*_1| = |\zeta_1 - m| > \sqrt{a}$ und $|\zeta^*_2| = |\zeta_2 - m| > \sqrt{a}$ die Gleichheit von ζ_1 und ζ_2 folgt. Nun kann (26,5) auch in der Form

$$t(\zeta^*) = \zeta^* \cdot \sqrt{\frac{Z(\zeta^{*2})}{\zeta^{*2}}}$$

geschrieben werden, und hieraus ersieht man unmittelbar, daß stets

$$t(-\zeta^*) = -t(\zeta^*) \quad (26,52)$$

¹⁾ indem man auf der linken Seite von (26,3) lediglich den ersten Summanden berücksichtigt.

gilt. Aus (26,51) folgt gemäß (26,5)

$$Z(\zeta^{*12}) = Z(\zeta^{*22}),$$

mithin, da ja $Z(\zeta^*)$ für $|\zeta - m| > a$, also $Z(\zeta^{*2})$ für $|\zeta - m| > \sqrt{a}$, umkehrbar eindeutig ist, $(\zeta_1 - m)^2 = (\zeta_2 - m)^2$, so daß entweder $\zeta_1 - m = \zeta_2 - m$ oder aber $\zeta_1 - m = -(\zeta_2 - m)$ sein muß. Diese zweite Möglichkeit scheidet jedoch aus, da dann natürlich $t(\zeta^{*1}) = t(-\zeta^{*2})$, mithin gemäß (26,52)

$$t(\zeta^{*1}) = -t(\zeta^{*2})$$

werden müßte, was wegen $t(\zeta^*) \neq 0$ für $|\zeta - m| > \sqrt{a}$ der Voraussetzung (26,51) widerspricht. Es muß also $\zeta_1 - m = \zeta_2 - m$, mithin $\zeta_1 = \zeta_2$ sein, was zu beweisen war.

Setzen wir nun für die Funktion $t(\zeta^*)$ die im Außengebiet des zuvor erwähnten Kreises k_1 mit dem Radius $a_1 = \sqrt{a}$ absolut und gleichmäßig konvergierende Entwicklung

$$t(\zeta^*) = \zeta^* + a_0 + \frac{a_1}{\zeta^*} + \frac{a_2}{\zeta^{*2}} + \dots \quad (26,6)$$

an, so wird

$$\begin{aligned} \{t(\zeta^*)\}^2 &= \zeta^{*2} + 2a_0 \cdot \zeta^* + (a_0^2 + 2a_1) \\ &\quad + \frac{2a_2 + 2a_0a_1}{\zeta^*} + \frac{a_1^2 + 2a_3 + 2a_0a_2}{\zeta^{*2}} + \dots, \end{aligned} \quad (26,61)$$

während gemäß (26,4)

$$Z(\zeta^{*2}) = \zeta^{*2} + \beta_0 + \frac{\beta_1}{\zeta^{*2}} + \dots \quad (26,62)$$

gilt. Durch Vergleich entsprechender Koeffizienten von (26,61) und (26,62) folgt dann wegen (26,5) insbesondere

$$2a_0 = 0 \text{ und } a_0^2 + 2a_1 = \beta_0,$$

mithin $\beta_0 = 2a_1$, und da (26,6) sämtliche Voraussetzungen des *Faber-Bieberbachschen* Flächensatzes erfüllt, so liefert (26,31) unter Beachtung der Tatsache, daß hierin jetzt a durch $a_1 = \sqrt{a}$ zu ersetzen ist, sofort die zu beweisende Relation (26,41).

Viertes Kapitel.

Allgemeine Theorie des Auftriebs unendlich breiter Tragflächen.

§ 27. Das komplexe Geschwindigkeitspotential einer ebenen Potentialströmung.

Wie wir in § 17 dargelegt haben, hängen das Geschwindigkeitspotential $\varphi(x, y)$ und die Stromfunktion $\psi(x, y)$ einer ebenen Potentialströmung einer idealen Flüssigkeit miteinander durch die *Cauchy-Riemannschen* Differentialgleichungen (17,9) zusammen, und beide Funktionen genügen der *Laplaceschen* Differentialgleichung (17,4) bzw. (17,91). Zwei derartige Funktionen lassen sich aber stets, wie zu Beginn von § 19 hervor-gehoben wurde, als Real- und als Imaginärteil einer regulären analytischen Funktion der komplexen Variablen $z = x + iy$ ansehen. Schreiben wir also

$$w(z) = \varphi(x, y) + i \cdot \psi(x, y), \quad (27,1)$$

so sind wir sicher, in dem so erhaltenen komplexen Aggregat $w(z)$ eine analytische Funktion von z vor uns zu haben, die sich in dem flüssigkeits-durchströmten Gebiet regulär verhält. Diese Funktion $w(z)$ wollen wir nun als das *komplexe Geschwindigkeitspotential* derjenigen wirbelfreien Flüssigkeitsbewegung bezeichnen, deren reelles Geschwindigkeitspotential durch $\varphi(x, y)$ gegeben ist.

Einer derartigen Verkoppelung des reellen Geschwindigkeitspotentials $\varphi(x, y)$ mit der reellen Stromfunktion $\psi(x, y)$ zu dem komplexen Geschwindigkeitspotential $w(z)$ entspricht offenbar die Auffassung, daß diejenige Ebene, in der eine zweidimensionale Flüssigkeitsströmung vor sich geht, als eine *Gaußsche Zahlenebene* angesehen werden soll. Jeder einzelne Punkt $P(x, y)$ der Strömungsebene stellt somit den Bildpunkt einer bestimmten komplexen Zahl $z = x + iy$ dar, und es liegt nahe, anstelle der durch (17,31) gegebenen reellen Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_y das komplexe Aggregat

$$u(z) = v_x(x, y) + i \cdot v_y(x, y) \quad (27,2)$$

zu benutzen, das wir als die *komplexe Strömungsgeschwindigkeit* bezeichnen werden. Zwischen $u(z)$ und $w(z)$ besteht dabei ein einfacher Zusammenhang. Da nämlich gemäß (27,1) unter Beachtung von (17,9) und (17,31)

$$w'(z) = \frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_x - i \cdot v_y$$

oder¹⁾

$$w'(z) = \overline{u(z)} \quad (27,3)$$

¹⁾ Durch Überstreichen soll auch hier wieder der Übergang zu den konjugiert-komplexen Größen angedeutet werden.

gilt, so gibt die Ableitung des komplexen Geschwindigkeitspotentials $w(z)$ an jeder Stelle des Strömungsgebiets den konjugierten Wert der komplexen Strömungsgeschwindigkeit $u(z)$ an.

Das Operieren mit z anstelle von x und y , mit $u(z)$ anstelle von $v_x(x, y)$ und $v_y(x, y)$ sowie mit $w(z)$ anstelle von $\varphi(x, y)$ und $\psi(x, y)$ bietet den großen Vorteil, daß dadurch die Anwendung funktionentheoretischer Methoden zur Lösung von Problemen der ebenen Hydro- und Aerodynamik ermöglicht wird. Denn jedes Problem aus der Theorie der ebenen Potentialströmungen läuft ja letzten Endes auf die Aufgabe hinaus, eine Lösung $\varphi(x, y)$ der Laplaceschen Differentialgleichung (17,4) ausfindig zu machen, die gewissen vorgegebenen Anfangs- bzw. Randbedingungen genügt, und diese Aufgabe läßt sich offenbar auf Grund des Ansatzes (27,1) in der Weise umformulieren, daß eine analytische Funktion $w(z)$ der komplexen Variablen z mit gewissen vorgegebenen Eigenschaften zu ermitteln ist. Inwiefern ein derartiges funktionentheoretisches Problem überhaupt eine Lösung besitzt, bedarf natürlich in jedem Einzelfall einer besonderen Untersuchung. Die im vorhergehenden Kapitel gewonnenen Erkenntnisse berechtigen jedoch zu der Erwartung, daß uns die Benutzung funktionentheoretischer Hilfsmittel, wenn überhaupt, so auf bequemerem und elegantem Wege zum Ziele führen wird. Durch Trennung von Reellem und Imaginärem wird man dann mühelos von dem in komplexer Form erhaltenen Resultat den Übergang zu Aussagen über die entsprechenden reellen Größen vollziehen können, denen natürlich allein eine unmittelbare physikalische oder technische Bedeutung zukommt.

Zur Veranschaulichung der vorstehenden Ausführungen behandeln wir das einfache Beispiel

$$w(z) = V \cdot e^{-i\Theta_0 \cdot z} \quad (27,4)$$

mit reellem V und reellem Θ_0 , das uns im nächsten Paragraphen von großem Nutzen sein wird. Da sich (27,4) wegen $z = x + iy$ sowie

$$e^{-i \cdot \Theta_0} = \cos \Theta_0 - i \cdot \sin \Theta_0$$

in der Form

$w(z) = V \cdot \{\cos \Theta_0 \cdot x + \sin \Theta_0 \cdot y\} + i \cdot V \cdot \{-\sin \Theta_0 \cdot x + \cos \Theta_0 \cdot y\}$
schreiben läßt, so wird gemäß (27,1)

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, y) &= V \cdot \{\cos \Theta_0 \cdot x + \sin \Theta_0 \cdot y\}, \\ \psi(x, y) &= V \cdot \{-\sin \Theta_0 \cdot x + \cos \Theta_0 \cdot y\}, \end{aligned} \right\} \quad (27,41)$$

mithin

$$\left. \begin{aligned} v_x(x, y) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = V \cdot \cos \Theta_0, \\ v_y(x, y) &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = V \cdot \sin \Theta_0. \end{aligned} \right\} \quad (27,42)$$

Infolgedessen stellt die Funktion (27,4) das komplexe Geschwindigkeitspotential einer *Parallelströmung* dar, die mit der Geschwindigkeit V in einer gegen die positive X -Achse um den Winkel Θ_0 geneigten Richtung vor sich geht. Die komplexe Strömungsgeschwindigkeit $u(z)$ wird gemäß (27,2) und (27,42)

$$u(z) = V \cdot \cos \Theta_0 + i \cdot V \cdot \sin \Theta_0,$$

so daß

$$\overline{u(z)} = V \cdot \cos \Theta_0 - i \cdot V \cdot \sin \Theta_0$$

gilt. Und da gemäß (27,4)

$$w'(z) = V \cdot e^{-i\Theta_0} = V \cdot \cos \Theta_0 - i \cdot V \cdot \sin \Theta_0$$

wird, so ist hiermit das Bestehen der Relation (27,3) für den hier ins Auge gefaßten Spezialfall verifiziert worden.

§ 28. Funktionentheoretische Formulierung eines ebenen aerodynamischen Randwertproblems.

Unsere nächste Aufgabe soll nun darin bestehen, das in § 18 formulierte ebene aerodynamische Randwertproblem in die im vorhergehenden Paragraphen eingeführte komplexe Ausdrucksweise zu übertragen. Zu diesem Zweck erinnern wir daran, daß wir das gesuchte reelle Geschwindigkeitspotential $\varphi(x, y)$ derjenigen ebenen Flüssigkeitsströmung, die das von einer Kontur C berandete, in der XY -Ebene gelegene Tragflächenprofil B unter dem Anstellwinkel α umfließt, gemäß (18,3) in der Form

$$\varphi(x, y) = \varphi_0(x, y) + \varphi_1(x, y) \quad (28,1)$$

angesetzt haben, wobei $\varphi_0(x, y)$ das reelle Geschwindigkeitspotential einer ebenen Parallelströmung darstellt, deren Geschwindigkeit vom Betrage V gegen die positive Richtung der X -Achse um den Winkel $\pi - \alpha$ geneigt ist. Einer solchen Parallelströmung entspricht aber, wie das am Schluß des vorhergehenden Paragraphen behandelte Beispiel (27,4) lehrt, das komplexe Geschwindigkeitspotential

$$w_0(z) = V \cdot e^{-i \cdot (\pi - \alpha)} \cdot z,$$

das sich wegen

$$e^{-i\pi} = \cos \pi - i \cdot \sin \pi = -1$$

auch in der Form

$$w_0(z) = -V \cdot e^{i\alpha} \cdot z \quad (28,2)$$

schreiben läßt. Infolgedessen werden wir für das komplexe Geschwindigkeitspotential $w(z)$, das unser aerodynamisches Randwertproblem in der jetzt als Z -Ebene aufzufassenden Strömungsebene charakterisieren soll, mit Benutzung von (28,2) den Ansatz

$$w(z) = w_0(z) + w_1(z) \quad (28,3)$$

machen, wobei dann

$$w_1(z) = \varphi_1(x, y) + i \cdot \psi_1(x, y) \quad (28,4)$$

zu setzen, mithin unter $w_1(z)$ eine im Außengebiet B' von C definierte Funktion von z zu verstehen ist, deren Realteil $\varphi_1(x, y)$ den in § 18 gemachten Ausführungen zufolge der Randbedingung

$$\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right]_C = V \cdot \cos \alpha \cdot \cos(n, x) - V \cdot \sin \alpha \cdot \cos(n, y), \quad (28,41)$$

ferner den Grenzbedingungen

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0 \quad (28,42)$$

sowie drittens der „Zirkulationsbedingung“

$$\int_{(C_1)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} ds = J \quad (28,43)$$

genügen muß, in der C_1 eine beliebige, die Kontur C einmal umschlingende geschlossene Kurve und J eine fest vorgegebene Zahl bedeuten soll.

Bevor wir diese drei Bedingungen im einzelnen diskutieren, wollen wir die wichtige Bemerkung einschalten, daß durch sie *die gesuchte Funktion $w_1(z)$, falls sie überhaupt existieren sollte, bis auf eine additive Konstante vollständig bestimmt ist.* Dies trifft nämlich einerseits, wie wir in § 18 bereits bewiesen haben, für ihren Realteil $\varphi_1(x, y)$ zu, wodurch dann aber auch andererseits, wie zu Beginn von § 23 dargelegt wurde, der Imaginärteil $\psi_1(x, y)$ bis auf eine additive Konstante festgelegt erscheint.

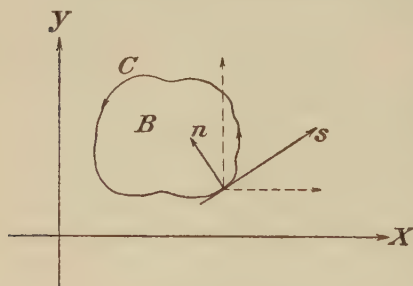


Fig. 19.

Uns nunmehr der Bedingung (28,41) zuwendend, beachten wir fürs

erste, daß auf Grund des Bestehens der *Cauchy-Riemannschen* Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cdot \cos(n, x) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \cdot \cos(n, y) = \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \cdot \cos(n, x) - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \cdot \cos(n, y)$$

gesetzt werden darf, woraus wegen (vgl. Fig. 19)

$$\left. \begin{aligned} \cos(n, x) &= \cos[\pi - (s, y)] = -\cos(s, y), \\ \cos(n, y) &= \cos(s, x) \end{aligned} \right\} \quad (28,5)$$

die Beziehung

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= -\frac{\partial \psi_1}{\partial y} \cdot \cos(s, y) - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \cdot \cos(s, x) \\ &= -\left\{ \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} \right\} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial s}\end{aligned}\quad (28,6)$$

oder

$$\psi_1(x, y) = -\int \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} ds + \text{const.}$$

folgt. Die Randbedingung (28,41) ist demnach mit der Forderung

$$[\psi_1(x, y)]_C = -V \cdot \cos \alpha \cdot \int \cos(n, x) ds + V \cdot \sin \alpha \cdot \int \cos(n, y) ds \quad (28,61)$$

identisch, wobei wir die willkürliche Integrationskonstante als für unsere Zwecke belanglos fortgelassen haben.

Auch die Grenzbedingungen (28,42) lassen eine einfache Umformulierung zu. Da nämlich gemäß (27,3)

$$w'_1(z) = \overline{u_1(z)} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - i \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}$$

sowie gemäß (18,43)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

gilt, so führt (28,42) zu der Grenzbedingung

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} w'_1(z) = 0. \quad (28,62)$$

Was schließlich die „Zirkulationsbedingung“ (28,43) anbelangt, so darf darin offenbar anstelle der beliebigen Kurve C_1 die Profilkontur C gewählt werden¹⁾. Weil aber

$$\int_{(\tilde{C})} \cos(n, x) ds = \int_{(\tilde{C})} \cos(n, y) ds = 0$$

wird, so können wir wegen (28,41)

$$\int_{(C)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} ds = \int_{(C)} \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} - i \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right\} ds$$

setzen²⁾, woraus unter Beachtung von (28,6) und (28,4)

$$\int_{(C)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} ds = \int_{(C)} \left\{ \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} + i \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} \right\} \cdot \frac{ds}{dz} dz = \int_{(C)} \frac{\partial w_1}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dz} dz = \int_{(C)} w'_1(z) dz$$

¹⁾ Dies sieht man sofort ein, wenn man in der auf S. 61/62 angestellten Überlegung die Kurve C_2 durch die Profilkontur C ersetzt.

²⁾ Denn gemäß (28,41) wird ja

$$\int_{(C)} i \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} ds = i V \cos \alpha \cdot \int_{(C)} \cos(n, x) ds - i V \sin \alpha \cdot \int_{(C)} \cos(n, y) ds = 0.$$

folgt, so daß (28,43) in

$$\int_{(C)} w_1'(z) dz = J \quad (28,63)$$

übergeht.

Bedenken wir nun, daß einerseits, da nach der auf S. 65 getroffenen Voraussetzung das von der Kontur C berandete Profil B den Nullpunkt $z = 0$ der Z -Ebene als inneren Punkt enthält, gemäß (19,32) die Beziehung

$$\int_{(C)} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

besteht, andererseits aber

$$\frac{1}{z} = \frac{d}{dz} \ln z$$

gilt, so liegt es nahe, den Ansatz

$$w_1(z) = -\frac{Ji}{2\pi} \cdot \ln z + w_2(z) \quad (28,7)$$

zu machen, wobei mit $w_2(z)$ eine eindeutige, im Unendlichen reguläre Funktion von z bezeichnet sein soll. Alsdann ist nämlich zunächst die Bedingung (28,63) ohne weiteres erfüllt, da ja wegen der Eindeutigkeit von $w_2(z)$

$$\int_{(C)} w_2'(z) dz = 0,$$

hingegen wegen der soeben erwähnten Relationen

$$-\frac{Ji}{2\pi} \cdot \int_{(C)} \frac{d}{dz} \ln z dz = -\frac{Ji}{2\pi} \cdot \int_{(C)} \frac{1}{z} dz = J$$

werden muß. Ferner wird gemäß (28,7)

$$w_1'(z) = -\frac{Ji}{2\pi} \cdot \frac{1}{z} + w_2'(z),$$

mithin

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} w_1'(z) = \lim_{|z| \rightarrow \infty} w_2'(z),$$

und da $w_2(z)$ als eine im Unendlichen reguläre Funktion von z gemäß (21,61) der Bedingung

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} [z \cdot w_2'(z)] = 0,$$

mithin erst recht der Bedingung

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} w_2'(z) = 0$$

genügt, so wird durch (28,7) zugleich auch die Grenzbedingung (28,62) von selbst erfüllt. Setzen wir schließlich in Analogie zu (28,4)

$$w_2(z) = \varphi_2(x, y) + i \cdot \psi_2(x, y), \quad (28,71)$$

so läßt sich (28,7) durch Zerspaltung in Real- und Imaginärteil in der Form

$$\begin{aligned} w_1(z) &= -\frac{Ji}{2\pi} \cdot \left\{ \ln |z| + i \cdot \arg z \right\} + \varphi_2(x, y) + i \cdot \psi_2(x, y) \\ &= \left\{ \frac{J}{2\pi} \cdot \arg z + \varphi_2(x, y) \right\} + i \cdot \left\{ -\frac{J}{2\pi} \ln |z| + \psi_2(x, y) \right\} \end{aligned}$$

schreiben, so daß wegen (28,4)

$$\varphi_1(x, y) = -\frac{J}{2\pi} \cdot \ln \sqrt{x^2 + y^2} + \varphi_2(x, y)$$

oder

$$\psi_2(x, y) = \varphi_1(x, y) + \frac{J}{2\pi} \cdot \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

gilt. Demnach führt die Forderung (28,61) zu der von der Funktion $\varphi_2(x, y)$ längs C zu erfüllenden Randbedingung

$$\begin{aligned} [\psi_2(x, y)]_C &= -V \cdot \cos \alpha \cdot \int \cos(n, x) ds \\ &+ V \cdot \sin \alpha \cdot \int \cos(n, y) ds + \frac{J}{2\pi} \cdot [\ln \sqrt{x^2 + y^2}]_C, \end{aligned} \quad (28,8)$$

und die Gesamtheit der vorstehenden Ausführungen läßt sich daher zu dem folgenden Resultat zusammenfassen:

Das komplexe Geschwindigkeitspotential $w(z)$ derjenigen wirbelfreien zweidimensionalen Flüssigkeitsströmung, die ein den Nullpunkt der Z -Ebene als inneren Punkt enthaltendes Profil B mit einer gegen die positive Richtung der reellen Achse um den Winkel $\pi - \alpha$ geneigten Translationsgeschwindigkeit vom Betrage V umfließt, wird bis auf eine willkürlich bleibende additive Konstante durch den Ausdruck

$$w(z) = -V \cdot e^{i\alpha} \cdot z - \frac{Ji}{2\pi} \cdot \ln z + w_2(z) \quad (28,9)$$

dargestellt, wobei J die vorgegebene Zirkulationskonstante bedeutet, und wobei unter $w_2(z)$ eine eindeutige, im ganzen Außengebiet B' der Profilkontur C einschließlich des unendlichfernen Punktes reguläre analytische Funktion von z zu verstehen ist, deren Imaginärteil $\psi_2(x, y)$ beim Übergang auf C die in (28,8) verzeichneten Werte annimmt.

§ 29. Das komplexe Geschwindigkeitspotential der Strömung um eine Kreiskontur.

Besonders einfach gestalten sich die Verhältnisse, falls als Profil B eine um den Nullpunkt der Z -Ebene als Mittelpunkt mit dem Radius a gelegte Kreisfläche κ_0 gewählt wird, und falls überdies die Richtung der Translationsgeschwindigkeit mit der negativen Richtung der reellen Achse übereinstimmt, mithin der Anstellwinkel α den Wert Null besitzt. Denn da auf der kreisförmigen Berandung k_0 von κ_0

$$\frac{J}{2\pi} \cdot [\ln \sqrt{x^2 + y^2}]_{k_0} = \frac{J}{2\pi} \cdot \ln a = \text{const.}$$

sowie (vgl. Fig. 20)

$$\cos(n, x) = \cos(\pi - \vartheta) = -\cos \vartheta$$

gilt, so nimmt hier die Randbedingung (28,8) die Form

$$\psi_2^*(a, \vartheta) = [\psi_2(x, y)]_{k_0} = -V \cdot \int \cos(n, x) ds = a V \cdot \int \cos \vartheta d\vartheta$$

oder

$$\psi_2^*(a, \vartheta) = a \cdot V \cdot \sin \vartheta \quad (29,1)$$

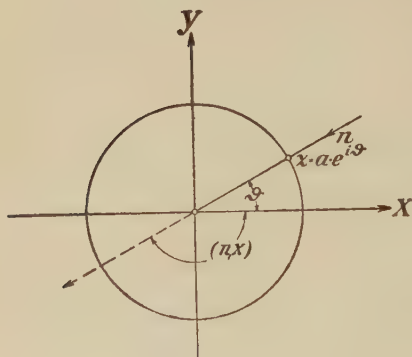


Fig. 20.

an, und die Bestimmung des komplexen Geschwindigkeitspotentials der Strömung ist damit gemäß (28,9) auf die Aufgabe reduziert, eine im Außengebiet κ'_0 des Kreises k_0 der Z -Ebene überall reguläre analytische Funktion $w_2(z)$ zu finden, deren Imaginärteil $\psi_2(x, y) = \psi_2^*(r, \Theta)$ auf k_0 die durch (29,1) vorgeschriebenen Werte $\psi_2^*(a, \vartheta)$ annimmt. Diese Aufgabe stellt aber einen Spezialfall des in § 23 behandelten funktionentheoretischen Randwertproblems dar, so daß sich ihre Lösung auf Grund der

dort gemachten Ausführungen im Prinzip gemäß (22,53) durch den Ansatz

$$\psi_2^*(r, \Theta) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} a \cdot V \cdot \sin \vartheta \cdot \frac{r^2 - a^2}{r^2 + a^2 - 2ar \cdot \cos(\Theta - \vartheta)} d\vartheta \quad (29,2)$$

gewinnen läßt.

Um das in (29,2) auftretende Integral auszuwerten, setzen wir zunächst

$$\frac{a}{r} = \mu, \quad (29,21)$$

womit wir die Beziehung

$$\psi_2^*(r, \Theta) = \frac{a \cdot V \cdot (1 - \mu^2)}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\sin \vartheta}{1 + \mu^2 - 2\mu \cos \Theta \cdot \cos \vartheta - 2\mu \sin \Theta \cdot \sin \vartheta} d\vartheta$$

erhalten. Führen wir dann als neue Integrationsvariable $\zeta = e^{i\vartheta}$ ein, so wird

$$\cos \vartheta = \frac{\zeta^2 + 1}{2\zeta}, \quad \sin \vartheta = \frac{\zeta^2 - 1}{2i\zeta}, \quad \frac{d\vartheta}{d\zeta} = \frac{1}{i\zeta},$$

und $\psi_2^*(r, \Theta)$ ist daher durch das längs des Einheitskreises k_1 der Z-Ebene zu erstreckende Integral

$$\psi_2^*(r, \Theta) = \frac{a \cdot V \cdot (1 - \mu^2)}{2\pi i} \cdot \int_{(k_1)} \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta \cdot \{2i \cdot (1 + \mu^2) \cdot \zeta - 2i\mu \cos \Theta \cdot (\zeta^2 + 1) - 2\mu \sin \Theta \cdot (\zeta^2 - 1)\}} d\zeta$$

gegeben, wofür wir mit

$$\zeta_1 = 0, \quad \zeta_2 = \mu \cdot \frac{i}{\sin \Theta + i \cdot \cos \Theta}, \quad \zeta_3 = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{i}{\sin \Theta + i \cdot \cos \Theta}$$

auch

$$\psi_2^*(r, \Theta) = - \frac{a \cdot V \cdot (1 - \mu^2)}{4\pi i \mu \cdot (\sin \Theta + i \cdot \cos \Theta)} \cdot \int_{(k_1)} \frac{\zeta^2 - 1}{(\zeta - \zeta_1) \cdot (\zeta - \zeta_2) \cdot (\zeta - \zeta_3)} d\zeta \quad (29,22)$$

schreiben können. Die Punkte ζ_1 , ζ_2 und ζ_3 stellen offenbar Pole erster Ordnung des Integranden dar, von denen aber wegen

$$|\zeta_1| = 0, \quad |\zeta_2| = \mu, \quad |\zeta_3| = \frac{1}{\mu}$$

nur die beiden ersten in der von k_1 berandeten Einheitskreisfläche der Z-Ebene gelegen sind, da ja für jedes dem Strömungsgebiet κ'_0 angehörende $z = r \cdot e^{i\Theta}$ stets $|z| = r > a$, mithin gemäß (29,21)

$$\mu < 1 \quad \text{und} \quad \frac{1}{\mu} > 1$$

gilt. Anwendung des *Cauchyschen* Residuensatzes (19,6) auf (29,22) liefert daher

$$\psi_2^*(r, \Theta) = - \frac{a \cdot V \cdot (1 - \mu^2)}{4\pi i \mu \cdot (\sin \Theta + i \cdot \cos \Theta)} \cdot 2\pi i \cdot (R_1 + R_2),$$

wobei gemäß (19,52)

$$R_1 = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_1} \left\{ \frac{(\zeta - \zeta_1) \cdot (\zeta^2 - 1)}{(\zeta - \zeta_1) \cdot (\zeta - \zeta_2) \cdot (\zeta - \zeta_3)} \right\} = \frac{-1}{\zeta_2 \cdot \zeta_3} = (\sin \Theta + i \cdot \cos \Theta)^2,$$

$$R_2 = \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_1} \left\{ \frac{(\zeta - \zeta_2) \cdot (\zeta^2 - 1)}{(\zeta - \zeta_1) \cdot (\zeta - \zeta_2) \cdot (\zeta - \zeta_3)} \right\} = \frac{\zeta_2^2 - 1}{\zeta_2 \cdot (\zeta_2 - \zeta_3)}$$

$$= \frac{\mu^2 + (\sin \Theta + i \cos \Theta)^2}{\mu^2 - 1}$$

zu setzen ist, so daß

$$R_1 + R_2 = -\frac{\mu^2}{1 - \mu^2} \cdot \left\{ (\sin \Theta + i \cdot \cos \Theta)^2 + 1 \right\}$$

$$= -\frac{\mu^2}{1 - \mu^2} \cdot \left\{ (\sin \Theta + i \cdot \cos \Theta)^2 + (\sin \Theta + i \cos \Theta) \cdot (\sin \Theta - i \cdot \cos \Theta) \right\}$$

$$= -\mu^2 \cdot \frac{2 \sin \Theta \cdot (\sin \Theta + i \cos \Theta)}{1 - \mu^2},$$

mithin unter Beachtung von (29,21)

$$\psi_2^*(r, \Theta) = \psi_2(x, y) = \frac{a^2 \cdot V}{r} \cdot \sin \Theta \quad (29,3)$$

wird, womit der Imaginärteil der gesuchten Funktion $w_2(z)$ aufgefunden ist. Da aber wegen $z = r \cdot e^{i\Theta}$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} \cdot e^{-i\Theta} = \frac{1}{r} \cdot (\cos \Theta - i \cdot \sin \Theta)$$

gilt, so erhalten wir aus (29,3) sofort

$$w_2(z) = -\frac{a^2 \cdot V}{z}, \quad (29,4)$$

so daß gemäß (28,9) das komplexe Geschwindigkeitspotential einer ebenen Flüssigkeitsströmung, die eine mit dem Radius a um den Nullpunkt der Z -Ebene als Mittelpunkt gelegte Kreisfläche mit einer zur negativen Richtung der reellen Achse parallelen Translationsgeschwindigkeit vom Betrage V umfließt, durch die Funktion

$$w(z) = -V \cdot \left(z + \frac{a^2}{z} \right) - \frac{Ji}{2\pi} \cdot \ln z \quad (29,5)$$

gegeben ist, wobei J wieder die vorläufig noch unbestimmte Zirkulationskonstante bedeutet.

§ 30. Allgemeine Eigenschaften der Strömung um eine Kreiskontur.

Um die Struktur der Strömung um das im vorhergehenden Paragraphen eingeführte Kreisflächenprofil κ_0 zu erkennen, zerspalten wir den für ihr komplexes Geschwindigkeitspotential $w(z)$ erhaltenen Ausdruck (29,5) in seinen Real- und seinen Imaginärteil. Dies liefert

$$w(z) = \left\{ -V \cdot x - \frac{V \cdot a^2}{x^2 + y^2} \cdot x + \frac{J}{2\pi} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \right\} \\ + i \cdot \left\{ -V \cdot y + \frac{V \cdot a^2}{x^2 + y^2} \cdot y - \frac{J}{2\pi} \cdot \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right\},$$

so daß das *reelle Geschwindigkeitspotential* $\varphi(x, y)$ gemäß (27,1) durch

$$\varphi(x, y) = -V \cdot x \cdot \left(1 + \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right) + \frac{J}{2\pi} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \quad (30,1)$$

sowie die *Stromfunktion* $\psi(x, y)$ durch

$$\psi(x, y) = -V \cdot y \cdot \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right) - \frac{J}{2\pi} \cdot \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad (30,2)$$

gegeben ist. Für die *Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit* $\mathbf{v}(x, y)$ ergibt sich somit

$$\left. \begin{aligned} v_x(x, y) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -V \cdot \left\{ 1 - \frac{a^2 \cdot (x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right\} - \frac{J}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}, \\ v_y(x, y) &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{2V a^2 \cdot x \cdot y}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{J}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2}, \end{aligned} \right\} \quad (30,3)$$

und für die *komplexe Strömungsgeschwindigkeit* $u(z)$ erhalten wir wegen (27,3) die Beziehung

$$\overline{u(z)} = -V \cdot \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) - \frac{J i}{2\pi} \cdot \frac{1}{z}, \quad (30,4)$$

aus der sich durch Trennung von Reellem und Imaginärem gemäß (27,2) die Richtigkeit der in (30,3) notierten Relationen nochmals bestätigen läßt.

Alle diese Formeln zeigen nun, daß sich die allgemeinste Strömung um eine Kreiskontur aus zwei Partialbewegungen zusammensetzt, deren eine mit verschwindender Zirkulationskonstante J in Fortfall kommt. Am anschaulichsten überblickt man die Struktur des stationären Strömungsfeldes, wenn man sich die gemäß (17,7) und (30,2) durch

$$V \cdot y \cdot \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right) + \frac{J}{2\pi} \cdot \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \text{const.} \quad (30,5)$$

gelieferte Schar der *Stromlinien* in die Bewegungsebene einzeichnet, denn diese Kurven müssen uns ja — eben wegen des stationären Charakters

der Strömung — ein unmittelbares Bild der Bahnen der einzelnen Flüssigkeitsteilchen geben. Betrachten wir zunächst die erste, von der Zirkulationskonstanten J unabhängige Partialbewegung, deren Stromlinien also die Gleichung

$$V \cdot y \cdot \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right) = \text{const.} \quad (30,51)$$

besitzen. Die physikalische Deutung des dabei erhaltenen, in Fig. 21 zur Darstellung gebrachten Strömungsbildes ist ohne weiteres klar: die sich bewegenden Flüssigkeitsteilchen weichen der sich ihnen als Hindernis in den Weg stellenden Kreisfläche nach beiden Seiten aus, und zwar in völlig

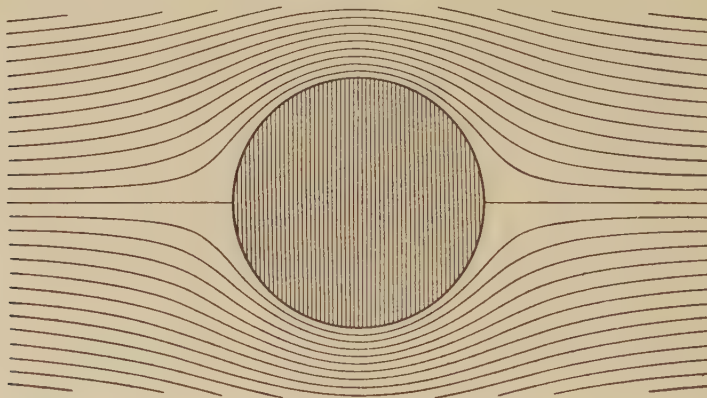


Fig. 21.

symmetrischer Weise, da ja auch zu irgendwelcher Unsymmetrie keine Veranlassung gegeben ist. Der in der Nähe des Kreises eintretenden Zusammendrängung bzw. Auseinanderzerrung der Stromlinien entspricht gemäß den in § 4 gemachten Ausführungen eine Vergrößerung bzw. eine Verkleinerung des Betrages v der Strömungsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$, mithin gemäß der Bernoullischen Gleichung (17,5) eine Verkleinerung bzw. eine Vergrößerung des Flüssigkeitsdrucks p ; doch da sich diese Druckänderungen durchaus symmetrisch über die Kreiskontur verteilen, so heben sich ihre Wirkungen wechselseitig auf, und die resultierende Luftkraft wird Null. Die durch (30,51) charakterisierte „Ausweichströmung“ vermag also weder Widerstand noch Auftrieb hervorzurufen.

Wir wenden uns nunmehr dem zweiten, dem Betrag der Zirkulationskonstanten J proportionalen Bestandteil der Stromfunktion $\psi(x, y)$ zu, der gemäß (30,2) bzw. (30,5) die durch

$$\frac{J}{2\pi} \cdot \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \text{const.} \quad (30,52)$$

dargestellte ebene Kurvenschar als Stromlinien liefert. Da sich diese Gleichung einfacher in der Form

$$x^2 + y^2 = \text{const.}$$

schreiben läßt, so sind hier sämtliche Stromlinien konzentrische Kreise, deren gemeinsamer Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt der Kreiskontur k_0 zusammenfällt (vgl. Fig. 22). Für das Quadrat der zugehörigen Strömungsgeschwindigkeit ergibt sich gemäß (30,3) der Ausdruck

$$\left\{ -\frac{J}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \right\}^2 + \left\{ \frac{J}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \right\}^2 = \frac{J^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2},$$

und dies zeigt, daß die einzelnen Flüssigkeitsteilchen ihre kreisförmigen Bahnen mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen, deren Betrag der

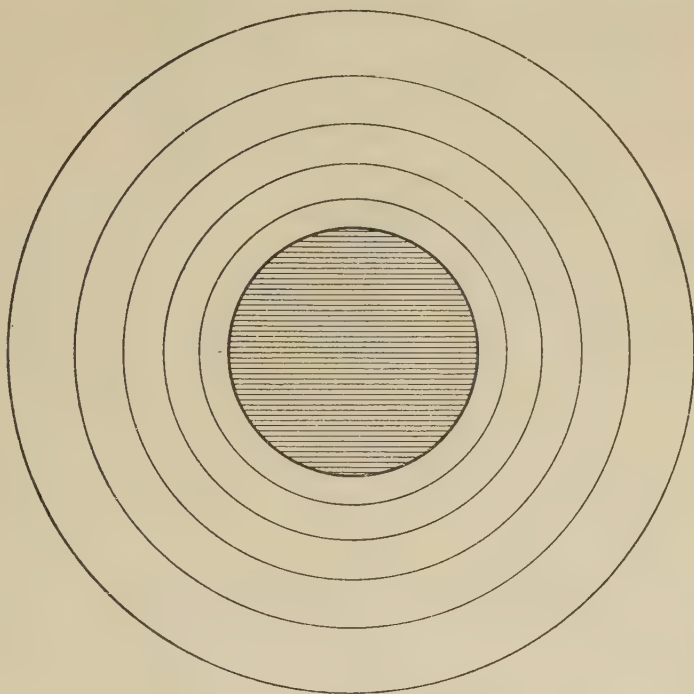


Fig. 22.

jeweiligen Entfernung des Teilchens vom Mittelpunkt der Kreiskontur k_0 umgekehrt proportional ist. Infolgedessen kann hier von längs der Kontur k_0 auftretenden Druckdifferenzen keine Rede sein, und so erfährt das Kreisflächenprofil auch seitens der durch (30,52) gekennzeichneten „Zirkulationsströmung“ weder Auftrieb noch Widerstand.

Während uns aber das Zustandekommen der „Ausweichströmung“ (30,51) unmittelbar verständlich erscheint, bereitet die Deutung des Entstehens der „Zirkulationsströmung“ (30,52), die ja mathematisch durch die Voraussetzung einer von Null verschiedenen Zirkulationskonstanten J in dem zweifach zusammenhängenden Strömungsgebiet κ'_0 bedingt wurde, sehr ernsthafte physikalische Schwierigkeiten. Selbstverständlich leuchtet die bloße Möglichkeit einer solchen Umströmung des Kreisflächenprofils ohne weiteres ein, allein es fragt sich nur, auf welche Weise sie praktisch zur Ausbildung zu gelangen vermag. Auf diese Frage werden wir in § 60 noch einmal zurückzukommen haben.

Um jetzt das Bild der in (30,5) enthaltenen Stromlinienschar zu bekommen, haben wir die Bilder der beiden Kurvenscharen (30,51) und (30,52) durch geometrische Addition übereinanderzulagern. Das Resultat dieser zeichnerischen Operation ist in Fig. 23 wiedergegeben. Beim ersten Anblick bereits springt die hier offensichtlich bestehende Unsymmetrie in Bezug auf die X -Achse in die Augen, während in Bezug auf die Y -Achse nach wie vor alles symmetrisch verläuft. Infolgedessen werden wir er-

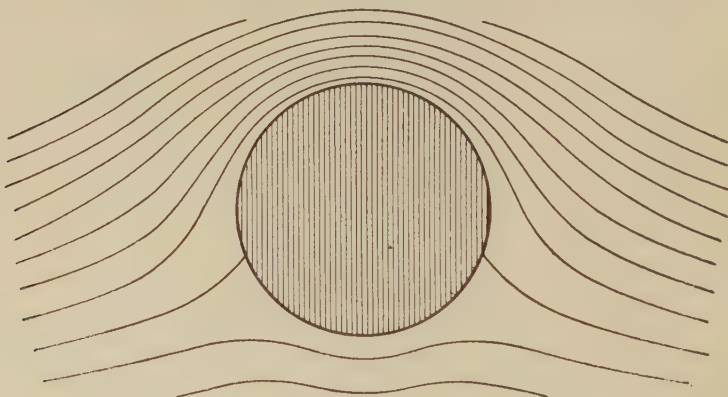


Fig. 23.

warten dürfen, daß mit dieser allgemeinsten Strömung im Gegensatz zu den zuvor betrachteten Spezialfällen eine von Null verschiedene, auf das Kreisflächenprofil senkrecht zur Richtung der X -Achse einwirkende Kraftresultante vorhanden ist, deren Wert sehr wesentlich von J abhängig sein muß — eine Erwartung, deren Richtigkeit wir tatsächlich sehr bald werden beweisen können.

Ein besonderes Interesse hat schließlich die Frage zu beanspruchen, ob in der allgemeinsten Strömung um die Kreiskontur k_0 *Staupunkte*, d. h. also solche Stellen (x_s, y_s) auftreten, an denen die beiden Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_y den Wert Null besitzen. Wegen (27,2) muß für einen Staupunkt $z_s = x_s + i \cdot y_s$ der Z -Ebene die komplexe Strömungs-

geschwindigkeit $u(z)$ und damit auch ihr konjugierter Wert $\overline{u(z)}$ verschwinden, und so liefert (30,4) die Gleichung

$$V \cdot \left(1 - \frac{a^2}{z_s^2}\right) + \frac{J \cdot i}{2\pi} \cdot \frac{1}{z_s} = 0,$$

aus der sich

$$\left. \begin{aligned} z_{s_1} &= + \frac{1}{4\pi V} \cdot \sqrt{16\pi^2 a^2 V^2 - J^2} - i \cdot \frac{J}{4\pi V}, \\ z_{s_2} &= - \frac{1}{4\pi V} \cdot \sqrt{16\pi^2 a^2 V^2 - J^2} - i \cdot \frac{J}{4\pi V} \end{aligned} \right\} \quad (30,6)$$

berechnet. Da nun hiernach

$$|z_{s_1}| = |z_{s_2}| = a$$

sowie

$$\arg z_{s_1} = - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{J}{\sqrt{16\pi^2 a^2 V^2 - J^2}},$$

$$\arg z_{s_2} = + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{J}{\sqrt{16\pi^2 a^2 V^2 - J^2}}$$

gilt, so erhalten wir also zwei auf der umströmten Kreiskontur k_0 zur imaginären Achse spiegelbildlich angeordnete Staupunkte, deren Argumente sich wesentlich nach der Größe der Zirkulationskonstanten J richten. Insbesondere ergibt sich für $J = 0$, d. h. also für den Fall der einfachen, in Fig. 21 dargestellten „Ausweichströmung“,

$$z_{s_1} = +a \text{ und } z_{s_2} = -a,$$

so daß hierbei die beiden Staupunkte auf der reellen Achse gelegen sind, von der sie sich dann mit wachsendem J mehr und mehr entfernen.

§ 31. Das komplexe Geschwindigkeitspotential der Strömung um eine beliebige Kontur.

Nachdem wir in § 29 das in § 28 formulierte ebene aerodynamische Randwertproblem für den Spezialfall eines kreisförmig berandeten Profils gelöst haben, bereitet der Nachweis der Lösbarkeit für beliebige Konturen keine wesentlichen Schwierigkeiten. Wir gründen diesen Nachweis auf den folgenden Satz: Sei $\zeta = f(z)$ eine analytische Funktion von z , durch die das von einer beschränkten geschlossenen Kurve C berandete Außengebiet B' der Z -Ebene derart auf das Außengebiet B' einer beschränkten geschlossenen Kurve Γ der Z -Ebene umkehrbar eindeutig und konform abgebildet werde, daß dabei das Unendlichferne ungeändert bleibt, mithin der Punkt

$z = \infty$ in den Punkt $\zeta = \infty$ übergeht¹⁾). Ist dann, $\zeta = \xi + i \eta$ gesetzt, die Funktion

$$W(\zeta) = \Phi(\xi, \eta) + i \cdot \Psi(\xi, \eta) \quad (31,1)$$

das komplexe Geschwindigkeitspotential derjenigen ebenen Flüssigkeitsströmung, die das von der Kontur Γ berandete Profil B in der Z -Ebene mit einer gegen die positive Richtung der reellen Achse um den Winkel $\pi - \alpha_2$ geneigten Translationsgeschwindigkeit vom Betrage V_2 umfließt, so stellt die durch Übertragung von $W(\zeta)$ mittels $\zeta = f(z)$ in das Gebiet B' der Z -Ebene erhaltene Funktion

$$W\{f(z)\} = w(z) = \varphi(x, y) + i \cdot \psi(x, y) \quad (31,2)$$

das komplexe Geschwindigkeitspotential derjenigen Flüssigkeitsströmung dar, die das von der Kontur C berandete Profil B in der Z -Ebene mit einer gegen die positive Richtung der reellen Achse um den Winkel

$$\pi - \alpha_1 = \pi - [\alpha_2 + \arg f'(\infty)] \quad (31,21)$$

geneigten Translationsgeschwindigkeit vom Betrage

$$V_1 = V_2 \cdot |f'(\infty)| \quad (31,22)$$

umfließt. Die Zirkulationskonstante besitzt dabei für beide Strömungen denselben Wert.

Zum Beweis dieses Satzes bemerken wir zunächst, daß das komplexe Geschwindigkeitspotential $w(z)$ ohne Benutzung des speziellen Ansatzes (28,3) dahin gekennzeichnet werden kann, daß sein Realteil $\varphi(x, y)$ den Bedingungen (18,41), (18,44) und (18,5) genügen muß, wobei in (18,44) α durch α_1 sowie V durch V_1 zu ersetzen ist. Da aber gemäß (28,6) die Be-

ziehung $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = - \frac{\partial \psi}{\partial s}$ besteht, so ist (18,41) mit²⁾

$$[\psi(x, y)]_C = \text{const.} \quad (31,31)$$

identisch; ferner geht (18,44) wegen (27,3) in

$$\begin{aligned} \lim_{|z| \rightarrow 0} w'(z) &= \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \cdot \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -V_1 \cdot \cos \alpha_1 - i \cdot V_1 \cdot \sin \alpha_1 \\ &= -V_1 \cdot e^{i\alpha_1} \end{aligned} \quad (31,32)$$

über, und (28,63) liefert in Verbindung mit (28,3) und (28,2) anstelle von (18,5) die „Zirkulationsbedingung“ in der Form

$$\int_{(C)} w'(z) dz = J. \quad (31,33)$$

¹⁾ Hierdurch wird erreicht, daß die vollständigen, aus C sowie $z = \infty$ bzw. aus Γ sowie $\zeta = \infty$ bestehenden Berandungen der beiden zweifach zusammenhängenden Strömungsgebiete B' und B'' ineinander übergeführt werden (vgl. die Fußnote auf S. 67).

²⁾ Vgl. hierzu die auf (28,6) folgende Gleichung!

In entsprechender Weise muß die Funktion $W(\zeta)$ den drei Bedingungen

$$[\Psi(\xi, \eta)]_r = \text{const.}, \quad (31,41)$$

$$\lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} W'(\zeta) = -V_2 \cdot e^{i\alpha_2}, \quad (31,42)$$

$$\oint_{(\Gamma)} W'(\zeta) d\zeta = J \quad (31,43)$$

genügen, und unser Satz wird bewiesen sein, sobald wir zu zeigen vermögen, daß mit (31,2) die drei Relationen (31,41), (31,42) und (31,43) unter Beachtung von (31,21) und (31,22) mit (31,31), (31,32) und (31,33) übereinstimmen. Nun werden bei der durch $\zeta = f(z)$ vermittelten Abbildung die durch $\Psi(\xi, \eta) = \text{const.}$ gegebenen Kurven der Z -Ebene in die durch $\psi(x, y) = \text{const.}$ gegebenen Kurven der Z -Ebene übergeführt, und da dabei nach Voraussetzung die Kontur Γ in die Kontur C übergeht, so folgt aus (31,41) sofort (31,31). Da ferner für $|z| \rightarrow \infty$ auch $|\zeta| \rightarrow \infty$ gelten soll, so wird wegen (31,2)

$$\begin{aligned} \lim_{|z| \rightarrow \infty} w'(z) &= \lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} \left[\frac{d}{dz} W\{f(z)\} \right] = \lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} [W'(\zeta) \cdot f'(z)] \\ &= |f'(\infty)| \cdot e^{i \cdot \arg f'(\infty)} \cdot \lim_{|\zeta| \rightarrow \infty} W'(\zeta), \end{aligned}$$

und diese Gleichung zeigt, daß (31,42) wegen (31,21) und (31,22) die Beziehung (31,32) liefert. Schließlich ist (31,43) wegen

$$\int_{(C)} w'(z) dz = \int_{(C)} \frac{dW}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz} dz = \int_{(\Gamma)} W'(\zeta) d\zeta$$

mit (31,33) identisch, womit der gewünschte Beweis bereits abgeschlossen ist.

Zur Erläuterung führen wir zunächst ein besonders einfaches Beispiel an, das sich aber sogleich als prinzipiell bedeutsam erweisen wird. Betrachten wir einen um den Nullpunkt $\zeta = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius a geschlagenen Kreis k_0 der Z -Ebene, so ist das komplexe Geschwindigkeitspotential derjenigen Strömung, die die von k_0 berandete Kreisfläche κ_0 mit einer zur negativen Richtung der reellen Achse parallelen Translationsgeschwindigkeit vom Betrage V umfließt, gemäß (29,5) durch

$$W(\zeta) = -V \cdot \left(\zeta + \frac{a^2}{\zeta} \right) - \frac{J \cdot i}{2\pi} \cdot \ln \zeta \quad (31,5)$$

gegeben. Durch die Funktion

$$\zeta = f(z) = e^{ia} \cdot (z - m) \quad (31,51)$$

wird nun das Außengebiet κ'_0 von k_0 derart auf das Außengebiet κ' eines mit dem Radius a um $z = m$ als Mittelpunkt geschlagenen Kreises k der Z -Ebene abgebildet, daß dabei das Unendlichferne ungeändert bleibt, sowie

$$|f'(\infty)| = 1 \quad \text{und} \quad \arg f'(\infty) = a \quad (31,52)$$

gilt. Infolgedessen muß auf Grund unseres Satzes die durch Eintragen von (31,51) in (31,5) unter Fortlassung der unwesentlichen additiven Kon-

stanten $\frac{J \cdot \alpha}{2\pi}$ erhaltene Funktion

$$w(z) = -V \cdot \left\{ (z-m) \cdot e^{i\alpha} + \frac{\alpha^2}{z-m} \cdot e^{-i\alpha} \right\} - \frac{J \cdot i}{2\pi} \cdot \ln(z-m) \quad (31,6)$$

das komplexe Geschwindigkeitspotential derjenigen Strömung darstellen, die den Kreis k der Z -Ebene mit einer gegen die positive Richtung der reellen Achse um den Winkel $\pi - \alpha$ geneigten Translationsgeschwindigkeit vom Betrage V umfließt. Denn in der oben benutzten Bezeichnungsweise gilt hier ja

$$\alpha_2 = 0 \quad \text{und} \quad V_2 = V,$$

woraus gemäß (31,21) und (31,22) unter Beachtung von (31,52)

$$\pi - \alpha_1 = \pi - \alpha \quad \text{und} \quad V_1 = V$$

folgt.

Die für den Beweis der allgemeinen Lösbarkeit unseres ebenen aerodynamischen Randwertproblems entscheidende Bemerkung ist jetzt die, daß gemäß den in § 24 gemachten Ausführungen stets eine und nur eine analytische Funktion $\zeta = f(z)$ existiert, durch die das Außengebiet B' einer in der Z -Ebene gezogenen beschränkten geschlossenen Kurve C umkehrbar eindeutig und konform derart auf das Außengebiet κ' eines in der Z -Ebene gelegenen Kreises k abgebildet wird, daß dabei der unendlichferne Punkt $z = \infty$ der Z -Ebene in den unendlichfernen Punkt $\zeta = \infty$ der Z -Ebene übergeführt wird, und überdies die Relation $f'(\infty) = 1$ besteht. Da nämlich der Radius a und die durch $\zeta = m$ fixierte Lage des Mittelpunktes dieses Bildkreises k durch die Abbildungsfunktion $f(z)$ eindeutig bestimmt sind, und da das komplexe Geschwindigkeitspotential $W(\zeta)$ der den Kreis k mit einer gegen die positive Richtung der reellen Achse um den Winkel $\pi - \alpha$ geneigten Translationsgeschwindigkeit vom Betrage V umfließenden Strömung gemäß (31,6) durch

$$W(\zeta) = -V \cdot \left\{ (\zeta-m) \cdot e^{i\alpha} + \frac{\alpha^2}{\zeta-m} \cdot e^{-i\alpha} \right\} - \frac{J \cdot i}{2\pi} \cdot \ln(\zeta-m) \quad (31,7)$$

gegeben ist, so führt uns der eingangs formulierte Satz sofort zu dem folgenden Resultat: Ist

$$\zeta = f(z) \quad (31,8)$$

diejenige analytische Funktion von z , durch die das Außengebiet B' einer in der Z -Ebene gelegenen Profilkontur C auf das Außengebiet κ' der in der Z -Ebene durch die Gleichung

$$|\zeta - m| = a \quad (31,81)$$

bestimmten Kreiskontur k derart umkehrbar eindeutig und konform abgebildet wird, daß dabei das Unendlichferne ungeändert bleibt und

$$f'(\infty) = 1 \quad (31,82)$$

gilt, so ist das komplexe Geschwindigkeitspotential $w(z)$ der das von der Kontur C berandete Profil B der Z -Ebene mit einer gegen die positive Richtung der reellen Achse um den Winkel $\pi - \alpha$ geneigten Translationsgeschwindigkeit vom Betrage V umfließenden Strömung durch die Funktion

$$w(z) = -V \cdot \left\{ [f(z) - m] \cdot e^{i\alpha} + \frac{a^2}{f(z) - m} \cdot e^{-i\alpha} \right\} - \frac{J \cdot i}{2\pi} \ln [f(z) - m] \quad (31,9)$$

gegeben, wobei J die vorläufig noch willkürlich wählbare Zirkulationskonstante darstellt.

Hiermit haben wir nun die Lösbarkeit unseres ebenen aerodynamischen Randwertproblems in voller Allgemeinheit dargetan. Allein die vorstehenden Überlegungen bilden nicht nur einen mathematischen Existenzbeweis von rein theoretischem Interesse, sondern sie haben uns überdies zu der praktisch höchst bedeutsamen Einsicht geführt, daß die tatsächliche Ermittlung des Geschwindigkeitspotentials einer ein vorgelegtes Tragflächenprofil umfließenden wirbelfreien Strömung letzten Endes auf die Lösung einer ganz bestimmten Abbildungsaufgabe hinausläuft. Inwiefern sich solche Aufgaben wirklich bewältigen lassen, werden wir im weiteren Verlauf unserer Ausführungen noch näher zu erläutern haben.

§ 32. Die Festlegung der Zirkulationskonstanten.

Wie die rechte Seite der Gleichung (31,9) erkennen läßt, setzt sich die allgemeinste Strömung um ein beliebiges Profil, genau wie die in § 29 untersuchte allgemeinste Strömung um ein Kreisflächenprofil, aus zwei Partialbewegungen prinzipiell verschiedenen Charakters zusammen, deren eine mit verschwindender Zirkulationskonstante J in Fortfall kommt. Welche wesentliche Bedeutung gerade diesem von J abhängigen Strömungsanteil beizumessen ist, wurde bereits in § 30 ausdrücklich hervorgehoben, und so müssen die bisher erreichten Ergebnisse wertlos bleiben, solange wir nichts über die Größe der Zirkulationskonstanten J auszusagen vermögen.

Zu der hiermit als unbedingt notwendig erkannten Ergänzung unserer Theorie werden wir nun durch Berücksichtigung der Tatsache geführt, daß alle praktisch brauchbaren Tragflächenprofile an ihrem hinteren Ende in eine Ecke oder eine Spitze auslaufen. Bei der durch (31,8) vermittelten Abbildung des von der Profilkontur C berandeten Außengebiets B' der Z -Ebene auf das Außengebiet κ' des durch (31,81) dargestellten Kreises k der Z -Ebene werden ja, wie wir in § 24 gesehen haben, auch die beiden Gebietsberandungen C und k umkehrbar eindeutig und stetig einander zugeordnet. Ist nun z_s diejenige Stelle der Z -Ebene, an der die Ecke

bezw. Spitze S der Profilkontur C gelegen ist, so muß an dieser Stelle die Konformität der durch (31,8) besorgten Abbildung eine Unterbrechung erleiden. Denn bezeichnen wir (vgl. Fig. 24) die Profilöffnung mit ω , so muß augenscheinlich für $z = z_S$ die äußere Öffnung $2\pi - \omega$ in einen gestreckten, d. h. also in einen Winkel von der Größe π übergeführt werden. Dies besagt aber nichts anderes, als daß sich bei der durch (31,8) vermittelten Abbildung der Z -Ebene auf die Z -Ebene der Schnittwinkel zweier Kurven an der Stelle z_S mit der Zahl $\frac{\pi}{2\pi - \omega}$ multipliziert, mithin gemäß (20,3) in einer hinreichend kleinen Umgebung von z_S

$$f(z) = g(z) + (z - z_S)^{\frac{\pi}{2\pi - \omega}} \cdot g_1(z) \quad (32,1)$$

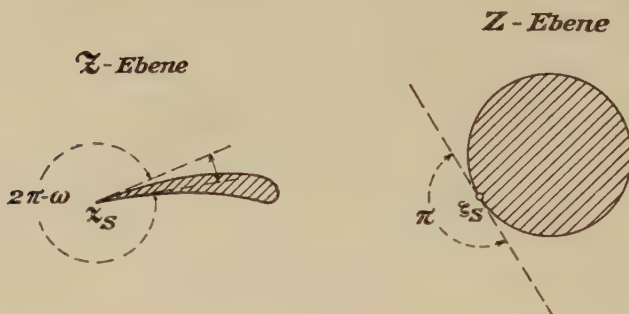


Fig. 24.

gesetzt werden darf, wobei unter $g_1(z)$ eine an der Stelle z_S reguläre und daselbst von Null verschiedene Funktion von z zu verstehen ist, während die für $z = z_S$ ebenfalls reguläre Funktion $g(z)$ den beiden Bedingungen

$$g(z_S) = f(z_S) \quad \text{und} \quad g'(z_S) \neq 0 \quad (32,11)$$

genügt. Nun gilt gemäß (31,9) unter Beachtung von (31,7)

$$w'(z) = \frac{d}{dz} W\{f(z)\} = W'(\zeta) \cdot f'(z), \quad (32,2)$$

wofür wir wegen (27,3) auch

$$\overline{u(z)} = \overline{U(\zeta)} \cdot f'(z) \quad (32,21)$$

schreiben können, falls $U(\zeta)$ die komplexe Geschwindigkeit der Strömung um die kreisförmige Kontur k der Z -Ebene bedeutet. Da sich aber durch Differentiation von (32,1)

$$f'(z) = g'(z) + (z - z_S)^{\frac{\pi}{2\pi - \omega}} \cdot g'_1(z) + \frac{\pi}{2\pi - \omega} \cdot (z - z_S)^{\frac{\pi}{2\pi - \omega} - 1} \cdot g_1(z)$$

oder

$$f'(z) = g'(z) + (z - z_S)^{\frac{\pi}{2\pi - \omega}} \cdot g_1'(z) + \frac{\pi \cdot g_1(z)}{(2\pi - \omega) \cdot (z - z_S)^{\frac{\pi}{2\pi - \omega}}} \quad (32,22)$$

ergibt, und da der letzte der hierin auf der rechten Seite auftretenden Summanden wegen

$$g_1(z_S) \neq 0 \quad \text{und} \quad \frac{\pi - \omega}{2\pi - \omega} > 0$$

für $z \rightarrow z_S$ über alle Grenzen wächst, so lehrt (32,21) in Verbindung mit (32,22), daß die Strömungsgeschwindigkeit an der Profilspitze S im allgemeinen unbegrenzt groß werden müßte. Dieser physikalisch sinnlosen Konsequenz kann man sich offenbar nur durch die Forderung

$$\overline{U(\zeta_S)} = 0 \quad (32,3)$$

entziehen, unter ζ_S den durch (31,8) in der Z -Ebene gelieferten Bildpunkt von z_S verstanden. Dies besagt aber nichts anderes, als daß bei der durch (31,8) vermittelten Abbildung als Bildpunkt der Profilspitze S ein auf der Kreiskontur k gelegener Staupunkt der in der Z -Ebene vor sich gehenden Strömung resultieren muß.

Daß derartige Staupunkte überhaupt existieren, hat uns bereits die am Schluß von § 30 angestellte Rechnung gelehrt. Wegen (31,7) wird

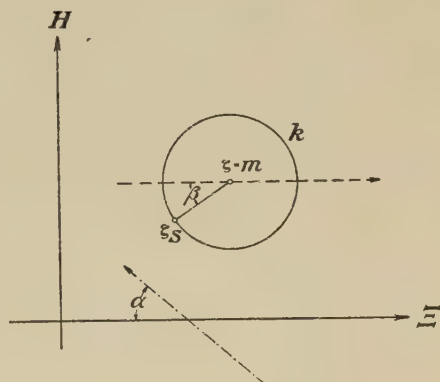


Fig. 25.

$$\overline{U(\zeta)} = W'(\zeta) = -V \cdot e^{i\alpha} + \frac{a^2 \cdot V}{(\zeta - m)^2} \cdot e^{-i\alpha} - \frac{J \cdot i}{2\pi} \cdot \frac{1}{\zeta - m}, \quad (32,31)$$

so daß gemäß (32,3), falls wir für den als Bildpunkt von z_S anzusehenden Staupunkt ζ_S den Ansatz (vgl. Fig. 25)

$$\zeta_S = f(z_S) = m - a \cdot e^{i\beta} \quad (32,4)$$

machen, die Relation

$$-V \cdot e^{i\alpha} + V \cdot e^{-i(\alpha+2\beta)} + \frac{J \cdot i}{2\pi a} \cdot e^{-i\beta} = 0$$

bestehen muß. Durch Multiplikation mit $-\frac{1}{2iV} \cdot e^{i\beta}$ ergibt sich

$$\frac{1}{2i} \cdot \left\{ e^{i(\alpha+\beta)} - e^{-i(\alpha+\beta)} \right\} = \frac{J}{4\pi a V},$$

woraus sofort

$$J = 4 \pi a V \cdot \sin(\alpha + \beta) \quad (32,5)$$

folgt. Und da bei gegebenem Profil, mithin bei gegebener Abbildungsfunktion $f(z)$, sowohl der Radius a des Bildkreises k der Z -Ebene als auch der aus (32,4) zu berechnende Winkel β bekannt sind, so liefert die zuvor formulierte Vorschrift *einen durch (32,5) eindeutig festgelegten Wert der bisher willkürlich gebliebenen Zirkulationskonstanten J* , womit dann die in (31,9) angeschriebene Lösung unseres ebenen aerodynamischen Randwertproblems als für alle praktisch in Betracht kommenden Tragflächenprofile völlig bestimmt anzusehen ist.

§ 33. Die Blasius'schen Formeln.

Uns nunmehr der Behandlung der Frage zuwendend, welche Kräfte auf ein umströmtes Tragflächenprofil ausgeübt werden, haben wir zunächst nochmals (vgl. S. 59) hervorzuheben, daß wir uns hierbei das Profil als den Repräsentanten eines Flügelstücks von der Breite eins vorstellen müssen; denn durch die Profilkontur C , die ja eine Kurve darstellt, können natürlich keine Flächenkräfte übertragen werden. Bezeichnen wir die rechtwinkligen Komponenten der auf die Breiteneinheit bezogenen resultierenden Luftkraft $\mathfrak{P}$ mit P_x und P_y , so gilt (vgl. S. 52/53)

$$P_x = \int_{(C)} p \cdot \cos(n, x) ds, \quad P_y = \int_{(C)} p \cdot \cos(n, y) ds,$$

wofür wir, wenn wir auch hier wieder die Wirkung der Schwere vernachlässigen, auf Grund der *Bernoullischen* Gleichung (17,5) wegen

$$\int_{(C)} p_0 \cdot \cos(n, x) ds = \int_{(C)} p_0 \cdot \cos(n, y) ds = 0$$

die Relationen

$$P_x = -\frac{1}{2} \rho \cdot \int_{(C)} v^2 \cdot \cos(n, x) ds, \quad P_y = -\frac{1}{2} \rho \cdot \int_{(C)} v^2 \cdot \cos(n, y) ds \quad (33,1)$$

schreiben können.

Um diese Integrale auszuwerten, hätten wir zunächst aus dem durch (31,9) gegebenen komplexen Geschwindigkeitspotential $w(z)$ der Profilströmung das reelle Geschwindigkeitspotential $\varphi(x, y)$ gemäß (27,1) abzutrennen, alsdann gemäß (17,31) die Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_y zu bilden, und schließlich den dann durch (17,51) gegebenen Wert von v^2 in (33,1) einzutragen. Wesentlich einfacher jedoch gestaltet sich die Rechnung, wenn wir unter Beibehaltung der in den vorhergehenden Paragraphen fortgesetzt benutzten komplexen Ausdrucksweise folgendermaßen vorgehen. Gemäß (33,1) wird

$$\begin{aligned} P_x - i \cdot P_y &= -\frac{1}{2} \rho \cdot \int_{(C)} v^2 \cdot \{\cos(n, x) - i \cdot \cos(n, y)\} ds \\ &= \frac{i}{2} \rho \cdot \int_{(C)} v^2 \cdot \{\cos(n, y) + i \cdot \cos(n, x)\} ds, \end{aligned}$$

wofür wir wegen (28,5) auch

$$P_x - i \cdot P_y = \frac{i}{2} \varrho \cdot \int_{(C)} v^2 \cdot \{ \cos(s, x) - i \cdot \cos(s, y) \} ds \quad (33,11)$$

schreiben können. Da aber die Strömungsgeschwindigkeit längs der Profilkontur C rein tangential gerichtet ist, so darf auf ihr

$$v = v_s = \frac{\partial \varphi}{\partial s} \quad \text{und} \quad v_n = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0,$$

mithin unter Beachtung von (28,6) und (27,1)

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial s} - i \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} + i \cdot \frac{\partial \psi}{\partial s} = w'(z) \cdot \frac{dz}{ds} \quad (33,2)$$

gesetzt werden. Da ferner

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dx}{ds} + i \cdot \frac{dy}{ds} = \cos(s, x) + i \cdot \cos(s, y) \quad (33,21)$$

gilt, so wird gemäß (33,11)

$$\begin{aligned} P_x - i P_y &= \frac{i}{2} \varrho \cdot \int_{(C)} w'(z)^2 \cdot \frac{dz}{ds} \cdot \{ \cos(s, x) + i \cdot \cos(s, y) \} \cdot \{ \cos(s, x) - i \cdot \cos(s, y) \} ds \\ &= \frac{i}{2} \varrho \cdot \int_{(C)} w'(z)^2 \cdot \frac{dz}{ds} ds \end{aligned}$$

oder

$$P_x - i P_y = \frac{i}{2} \varrho \cdot \int_{(C)} w'(z)^2 dz. \quad (33,3)$$

Diese Beziehung wird als die *erste Blasius'sche Formel* bezeichnet¹⁾.

In durchaus entsprechender Weise können wir verfahren, wenn wir das *statische Moment* der resultierenden Luftkraft $\mathfrak{P}$ in Bezug auf den Anfangspunkt des mit dem Profil fest verbundenen Koordinatensystems ermitteln wollen. Bezeichnen wir dieses Moment mit M_0 , so wird unter Berücksichtigung von (28,5)

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_{(C)} \{ p \cdot \cos(n, y) \cdot x - p \cdot \cos(n, x) \cdot y \} ds \\ &= -\frac{1}{2} \varrho \cdot \int_{(C)} v^2 \cdot \{ x \cdot \cos(n, y) - y \cdot \cos(n, x) \} ds \\ &= -\frac{1}{2} \varrho \cdot \int_{(C)} v^2 \cdot \{ x \cdot \cos(s, x) + y \cdot \cos(s, y) \} ds, \end{aligned}$$

und wenn wir dann die durch die Gleichung

$$N_0 = -\frac{1}{2} \varrho \cdot \int_{(C)} v^2 \cdot \{ x \cdot \cos(s, y) - y \cdot \cos(s, x) \} ds$$

¹⁾ Vgl. H. Blasius, Zs. f. Math. u. Phys. Bd. 58, S. 93 und Bd. 59, S. 43; 1910.

definierte Hilfsgröße N_0 einführen, so erhalten wir die Beziehung

$$\begin{aligned} M_0 - i \cdot N_0 &= -\frac{1}{2} \varrho \cdot \int_{(C)} v^2 \cdot \{ \cos(s, x) - i \cdot \cos(s, y) \} \cdot (x + i y) ds \\ &= -\frac{1}{2} \varrho \cdot \int_{(C)} v^2 \cdot \{ \cos(s, x) - i \cdot \cos(s, y) \} \cdot z ds, \end{aligned}$$

aus der wie zuvor die sogenannte *zweite Blasius'sche Formel*

$$M_0 - i \cdot N_0 = -\frac{1}{2} \varrho \cdot \int_{(C)} w'(z)^2 \cdot z dz \quad (33,4)$$

folgt.

§ 34. Der Kutta-Joukowskische Satz.

Um aus der ersten *Blasius'schen Formel* (33,3) die resultierende Luftkraft $\mathfrak{P}$ zu berechnen, beachten wir zunächst, daß sich die Abbildungsfunktion (31,8) im Außengebiet κ'_1 eines mit hinreichend großem Radius um den Nullpunkt der Z -Ebene als Mittelpunkt geschlagenen Kreises k_1 gemäß (24,2) in eine Reihe von der Form

$$\zeta = f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \dots + \frac{a_\nu}{z^\nu} + \dots \quad (34,1)$$

entwickeln läßt, aus der durch gliedweise Differentiation

$$f'(z) = 1 - \frac{a_1}{z^2} - \frac{2a_2}{z^3} - \frac{3a_3}{z^4} - \dots - \frac{\nu \cdot a_\nu}{z^{\nu+1}} - \dots \quad (34,11)$$

folgt. Ist dann k_2 ein zweiter, zu k_1 konzentrischer Kreis, der im Außengebiet κ'_1 des Kreises k_1 verläuft, und in dessen Innengebiet das ganze von C berandete Profil B gelegen ist, so kann (33,3) durch

$$P_x - i \cdot P_y = \frac{i}{2} \varrho \cdot \int_{(k_1)} w'(z)^2 dz \quad (34,2)$$

ersetzt werden. Da aber auf k_2 gemäß (34,1)

$$\zeta - m = z - m + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \dots,$$

mithin

$$\frac{1}{\zeta - m} = \frac{1}{z} + \frac{m}{z^2} + \frac{m^2 - a_1}{z^3} + \dots$$

sowie

$$\frac{1}{(\zeta - m)^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{2m}{z^3} + \frac{3m^2 - 2a_1}{z^4} + \dots$$

gilt, so wird hier gemäß (32,31)

$$W'(\zeta) = -V \cdot e^{ia} - \frac{Ji}{2\pi} \cdot \frac{1}{z} - \left\{ \frac{Ji}{2\pi} m - a^2 V \cdot e^{-ia} \right\} \cdot \frac{1}{z^2} - \dots,$$

mithin wegen (32,2) unter Beachtung von (34,11)

$$w'(z) = -V \cdot e^{ia} - \frac{Ji}{2\pi} \cdot \frac{1}{z} - \left\{ \frac{Ji}{2\pi} m - a^2 V \cdot e^{-ia} - a_1 V \cdot e^{ia} \right\} \cdot \frac{1}{z^2} - \dots,$$

und hieraus ergibt sich durch Quadrieren die auf k_2 gültige Entwicklung

$$w'(z)^2 = V^2 \cdot e^{2ia} + \frac{Ji}{\pi} \cdot V \cdot e^{ia} \cdot \frac{1}{z} + \left\{ \frac{Ji}{\pi} m V e^{ia} - 2a^2 V^2 - 2a_1 V^2 e^{2ia} - \frac{J^2}{4\pi^2} \right\} \cdot \frac{1}{z^2} + \dots \quad (34,3)$$

Tragen wir diesen Ausdruck in (34,2) ein, so erhalten wir durch gliedweise Integration

$$P_x - i \cdot P_y = \frac{i}{2} \varrho V^2 \cdot e^{2ia} \cdot \int_{(k_2)} dz - \frac{J}{2\pi} \varrho V \cdot e^{ia} \cdot \int_{(k_2)} \frac{dz}{z} + \frac{i}{2} \cdot \varrho \left\{ \frac{Ji}{\pi} m V e^{ia} - 2a^2 V^2 - 2a_1 V^2 \cdot e^{2ia} - \frac{J^2}{4\pi^2} \right\} \cdot \int_{(k_2)} \frac{dz}{z^2} + \dots,$$

und dies liefert wegen (19,32) und (19,33) die einfache Beziehung

$$P_x - i \cdot P_y = -i \cdot J \varrho V \cdot e^{ia},$$

die sich wegen

$$-i = e^{i(\frac{\pi}{2} - \pi)}$$

auch in der Form

$$(P_x - i \cdot P_y) \cdot e^{-i \cdot \frac{\pi}{2}} = J \cdot \varrho \cdot V \cdot e^{-i(\pi - \alpha)} \quad (34,4)$$

schreiben läßt.

Nun stellt aber der Ausdruck

$$V \cdot e^{-i(\pi - \alpha)} = V \cdot \cos(\pi - \alpha) - i \cdot V \cdot \sin(\pi - \alpha) = V_x - i \cdot V_y$$

den an der reellen Achse gespiegelten Translationsgeschwindigkeitsvektor $\mathfrak{B}$

dar, und da der Faktor $e^{-i \cdot \frac{\pi}{2}}$ eine im negativen Umlaufssinn vorzunehmende Drehung um einen rechten Winkel bewirkt, so besagt (34,4) zunächst, daß der an der reellen Achse gespiegelte resultierende Luftkraftvektor $P_x - i \cdot P_y$ auf dem an der reellen Achse gespiegelten Translationsgeschwindigkeitsvektor $V_x - i \cdot V_y$ senkrecht steht. Dies ist natürlich gleichbedeutend mit der Aussage, daß *die resultierende Luftkraft senkrecht zur Translationsgeschwindigkeit des Tragflügels gerichtet ist, mithin einen reinen Auftrieb darstellt, dessen Betrag pro Einheit der Tragflächenbreite gemäß (34,4) durch*

$$A = J \cdot \varrho \cdot V \quad (34,5)$$

gegeben ist. Führen wir hierin den in (32,5) verzeichneten Wert der Zirkulationskonstanten J ein, so erhalten wir die für die Aerodynamik des Fluges grundlegende Relation

$$A = 4\pi a \varrho V^2 \cdot \sin(\alpha + \beta), \quad (34,6)$$

die in der hier vorgetragenen Allgemeinheit im Jahre 1917 von *R. v. Mises* bewiesen¹⁾ wurde, die aber in der hydro- und aerodynamischen Literatur zu- meist als der *Kutta-Joukowskische Satz* bezeichnet wird, weil sie von diesen beiden Forschern, und zwar voneinander unabhängig, bereits früher für gewisse spezielle Profilformen aufgefunden worden ist.

§ 35. Das statische Moment des Auftriebs und die Lage des Druckpunkts.

Zur Berechnung des auf den Koordinatenanfangspunkt bezogenen statischen Moments M_0 der Luftkraft $\mathfrak{P}$ wählen wir in der in (33,4) an- geschriebenen zweiten *Blasiusschen* Formel anstelle der Profilkontur C den zu Beginn des vorhergehenden Paragraphen eingeführten Kreis k_2 als Integrationsweg, was die Beziehung

$$M_0 - i \cdot N_0 = -\frac{1}{2} \varrho \cdot \int_{(k_2)} w'(z)^2 \cdot z \, dz \quad (35,1)$$

liefert. Gemäß (34,3) aber gilt auf k_2 die Entwicklung

$$w'(z)^2 \cdot z = V^2 \cdot e^{2ia} \cdot z + \frac{Ji}{\pi} \cdot V \cdot e^{ia} \\ + \left\{ \frac{Ji}{\pi} m V e^{ia} - 2a^2 V^2 - 2a_1 V^2 e^{2ia} - \frac{J^2}{4\pi^2} \right\} \cdot \frac{1}{z} + \dots,$$

und wenn wir dies in (35,1) eintragen, so ergibt sich durch gliedweise Integra- tion unter Beachtung von (19,32) und (19,33)

$$M_0 - i \cdot N_0 = J \varrho V m \cdot e^{ia} + 2\pi i a_1 \varrho V^2 \cdot e^{2ia} + i \varrho \cdot \left\{ 2\pi a^2 V^2 + \frac{J^2}{4\pi} \right\}. \quad (35,2)$$

Setzen wir nun

$$a_1 = -c_1^2 \cdot e^{2i\gamma} \quad (35,31)$$

sowie

$$m = |m| \cdot e^{i\delta}, \quad (35,32)$$

wobei c_1 , γ und δ reelle Größen sind, so geht (35,2) in

$$M_0 - i \cdot N_0 = J \varrho V \cdot |m| \cdot e^{i(\alpha + \delta)} - 2\pi i c_1^2 \varrho V^2 \cdot e^{i \cdot 2(\alpha + \gamma)} + i \varrho \cdot \left\{ 2\pi a^2 V^2 + \frac{J^2}{4\pi} \right\}$$

oder

$$M_0 - i \cdot N_0 = J \varrho V \cdot |m| \cdot \cos(\alpha + \delta) + 2\pi c_1^2 \varrho V^2 \cdot \sin 2(\alpha + \gamma) \\ + i \cdot \left\{ J \varrho V \cdot |m| \cdot \sin(\alpha + \delta) - 2\pi c_1^2 \varrho V^2 \cdot \cos 2(\alpha + \gamma) + 2\pi a^2 \varrho V^2 + \frac{J^2 \varrho}{4\pi} \right\}$$

¹⁾ Vgl. *R. v. Mises*, Zeitschr. f. Flugtechn. u. Motorluftschiffahrt Bd. 8, S. 157; 1917.

über, woraus sich durch Trennung von Reellem und Imaginärem für das auf den Koordinatenanfangspunkt bezogene statische Moment des Auftriebs pro Einheit der Tragflügelbreite unter Beachtung von (34,5) die Relation

$$M_0 = A \cdot |m| \cdot \cos(\alpha + \delta) + 2\pi c_1^2 \varrho V^2 \cdot \sin 2(\alpha + \gamma) \quad (35,4)$$

entnehmen läßt.

Zeichnen wir den Kreis k der Z -Ebene, der bei der durch (34,1) vermittelten Abbildung das Bild der in der Z -Ebene gelegenen Profilkontur C darstellt, und den wir fortan als den Grundkreis k des Profils B bezeichnen wollen, in die Z -Ebene ein (vgl. Fig. 26), so wird der durch $z = m$ gegebene Mittelpunkt M dieses Kreises der Z -Ebene nach *R. v. Mises* der *Profilmittelpunkt* genannt. Da die rechtwinkligen Koordinaten von M gemäß (35,32) durch

$$x_M = |m| \cdot \cos \delta, \quad y_M = |m| \cdot \sin \delta$$

gegeben sind, so erhalten wir für das auf den Punkt M bezogene statische Moment M_M des Auftriebs A den Ausdruck

$$\begin{aligned} M_M &= M_0 - \left\{ |m| \cdot \cos \delta \cdot A \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - |m| \cdot \sin \delta \cdot A \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right\} \\ &= M_0 - A \cdot |m| \cdot \cos(\alpha + \delta), \end{aligned}$$

wofür wir wegen (35,4) auch

$$M_M = 2\pi c_1^2 \varrho V^2 \cdot \sin 2(\alpha + \gamma) \quad (35,5)$$

schreiben können.

Um schließlich die Lage des auf der Profilschneide befindlichen Druckpunkts D (vgl. S. 59) zu bestimmen, haben wir die durch die Gleichung

$$M_M = A \cdot h_M$$

definierte Länge h_M des Hebelarms des Auftriebs A zu ermitteln, die den Abstand des Profilmittelpunkts M von der Angriffslinie des Auftriebs mißt. Mit Benutzung von (34,6) und (35,5) ergibt sich die Beziehung

$$h_M = \frac{c_1^2 \cdot \sin 2(\alpha + \gamma)}{2\alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)}, \quad (35,6)$$

durch die der auf der Profilschneide angenommene Angriffspunkt D des Auftriebs A fixiert ist. Hiermit sind dann sämtliche Bestimmungsstücke, die für den pro Einheit der Flügelbreite wirksamen Luftkraftvektor $\mathfrak{A}$ charakteristisch sind, d. h. also sein Betrag, seine Richtung und sein Angriffspunkt, formelmäßig ermittelt worden.

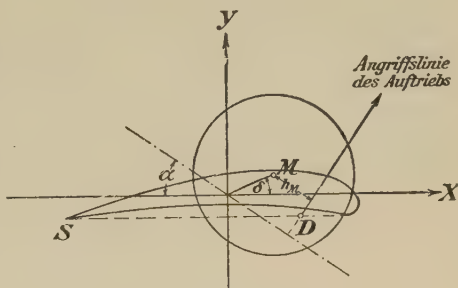


Fig. 26.

§ 36. Die Achsen und der Brennpunkt eines Profils.

Die in den beiden vorhergehenden Paragraphen für die Größe und das statische Moment des Auftriebs einer Tragfläche abgeleiteten Ausdrücke (34,6) und (35,5) zeichnen sich augenscheinlich durch überraschende Einfachheit aus. Beide sind nämlich in ihrer Gestalt von der Form des ins Auge gefaßten Profils völlig unabhängig, und das Profil selbst geht in jene Formeln lediglich mit einigen wenigen Parametern ein, die der die Abbildung des Außengebiets der Profilkontur C auf das Außengebiet des Grundkreises k vermittelnden Funktion (34,1) zu entnehmen sind. Auf diese *Profilparameter* werden wir in § 38 noch ausführlicher zurückzukommen haben; zuvor jedoch wollen wir im Anschluß an die grundlegenden Arbeiten von

R. v. Mises¹⁾ einige neue Begriffsbildungen einführen, die die Einfachheit und Übersichtlichkeit unserer Ergebnisse noch wesentlich zu steigern gestatten.

Ist S^* der auf dem Grundkreis k gelegene Bildpunkt der Profilspitze S , und bezeichnen wir die Verbindungsgerade von S^* mit dem Profilmittelpunkt M als die *erste Achse* des Profils, so ist (vgl. Fig. 27)

$$\alpha_1 = \alpha + \beta \quad (36,1)$$

der Anstellwinkel dieser ersten Achse gegen die Richtung der

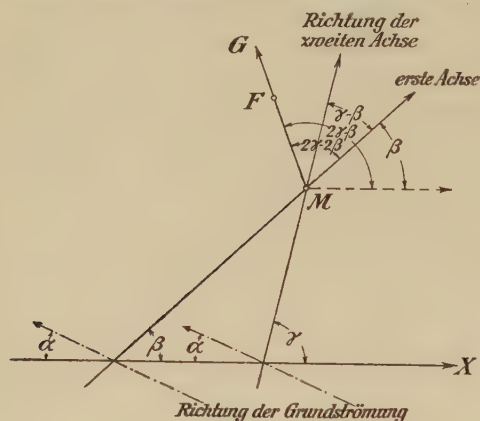


Fig. 27.

Flugbewegung. Und da (34,6) mit (36,1) in

$$A = 4\pi a_0 V^2 \cdot \sin \alpha_1 \quad (36,11)$$

übergeht, so wird die Größe des Auftriebs dem Sinus des Anstellwinkels der ersten Achse proportional. Der Winkel α_1 mißt demnach die jeweilige Verdrehung des Profils B aus derjenigen Lage, für die der Auftrieb verschwindet, weshalb man wohl auch von ihm als dem *wirksamen Anstellwinkel* zu sprechen pflegt.

Benennen wir sodann als *zweite Achse* des Profils diejenige Gerade, die aus der reellen Achse der Z -Ebene durch eine positive Drehung um den in (35,31) eingeführten Winkel γ hervorgeht, so wird (35,5) mit

$$\alpha_2 = \alpha + \gamma \quad (36,2)$$

zu

$$M_M = 2\pi c_1^2 \rho V^2 \cdot \sin (2\alpha_2). \quad (36,21)$$

¹⁾ Vgl. R. v. Mises, Zeitschr. f. Flugtechnik und Motorluftschiffahrt Bd. 11, S. 68 und S. 87; 1920.

Demnach ist das auf den Profilmittelpunkt bezogene statische Moment des Auftriebs dem Sinus des doppelten Anstellwinkels der zweiten Achse des Profils gegen die Richtung der Flugbewegung proportional.

Lassen wir ferner vom Profilmittelpunkt M eine Halbgerade G ausgehen, deren Richtung mit der positiven Richtung der reellen Achse der Z -Ebene den Winkel $2\gamma - \beta$ einschließt, und tragen wir auf G eine Strecke MF von der Länge $\frac{c_1^2}{a}$ ab, so soll der dadurch bestimmte Punkt F der Z -Ebene der Brennpunkt des in Rede stehenden Profils heißen. Der von der Halbgeraden G und der ersten Achse gebildete Winkel wird offenbar (vgl. Fig. 27) durch die Richtung der zweiten Achse halbiert, und es ist auf Grund der soeben angeführten Definition

$$z_F = m + \frac{c_1^2}{a} \cdot e^{i(2\gamma - \beta)} \quad (36,3)$$

zu setzen, falls z_F die dem Punkt F der Z -Ebene entsprechende komplexe Zahl bedeutet. Für das auf den Brennpunkt F bezogene statische Moment M_F des Auftriebs A erhalten wir nun zunächst gemäß (36,3) den Ausdruck

$$\begin{aligned} M_F &= M_M - \left\{ \frac{c_1^2}{a} \cdot \cos(2\gamma - \beta) \cdot A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \frac{c_1^2}{a} \cdot \sin(2\gamma - \beta) \cdot A \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right\} \\ &= M_M - \frac{c_1^2}{a} \cdot A \cdot \cos(\alpha - \beta + 2\gamma), \end{aligned}$$

so daß wegen (35,5) und (34,6)

$$M_F = 2\pi c_1^2 \varrho V^2 \cdot \{\sin(2\alpha + 2\gamma) - 2\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta + 2\gamma)\}$$

oder

$$M_F = -2\pi c_1^2 \varrho V^2 \cdot \sin 2(\beta - \gamma) \quad (36,31)$$

gilt. Diese einfache Relation bringt die bemerkenswerte Tatsache zum Ausdruck, daß das auf den Profilbrennpunkt F bezogene statische Moment des Auftriebs A vom Anstellwinkel α des Profils vollkommen unabhängig ist.

Für den auf den Brennpunkt F bezogenen Hebelarm h_F des Auftriebs bekommen wir gemäß (36,31) und (34,6) die Beziehung

$$h_F = \frac{M_F}{A} = - \frac{c_1^2 \cdot \sin 2(\beta - \gamma)}{2a \cdot \sin(\alpha + \beta)},$$

die wir mit

$$h = \frac{c_1^2}{2a} \cdot \sin 2(\beta - \gamma) \quad (36,32)$$

auch in der Form

$$h_F = - \frac{h}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (36,33)$$

schreiben können. Nun ist h_F die Länge des vom Profilbrennpunkt F auf die Angriffslinie des Auftriebs gefällten Lotes, sowie h wegen (36,33) die Länge der Projektion von h_F auf die senkrecht zur ersten Achse des Profils durch F hindurchgelegte Gerade G_0 (vgl. Fig. 28). Da aber h gemäß (36,32) vom Anstellwinkel α unabhängig ist, so müssen demnach die Fußpunkte der vom Brennpunkt F auf die zu verschiedenen Werten des Anstellwinkels α gehörenden Angriffslinien des Auftriebs auf einer und derselben Geraden gelegen sein, die im Abstand h von F parallel zur Richtung der ersten Achse des Profils verläuft. Und da bekanntlich die Parabel die Eigenschaft besitzt, daß der Fußpunkt des von ihrem Brennpunkt auf eine beliebige Tangente gefällten Lotes stets auf der Scheiteltangente der Parabel liegt, so müssen demnach die möglichen Lagen der Angriffslinien des Auftriebs für den Fall eines von Null verschiedenen h eine Parabel einhüllen, deren

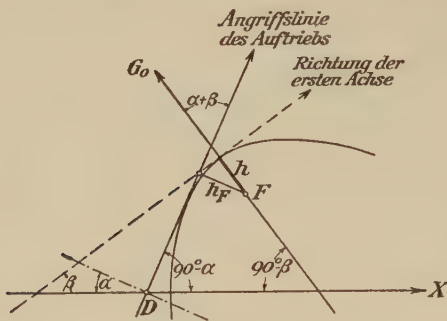


Fig. 28.

Brennpunkt durch den Profilbrennpunkt gegeben ist, und deren Achse zur ersten Achse des Profils senkrecht steht. Ist dagegen h und damit wegen (36,33) auch h_F gleich Null, so geht die Angriffslinie des Auftriebs durch den Profilbrennpunkt F hindurch, so daß die Lage des Druckpunkts D vom Anstellwinkel α unabhängig wird. Demnach werden die Profile mit einer vom Anstellwinkel unabhängigen Druck-

punktslage aus der Gesamtheit aller übrigen Profile durch die Gleichung $h = 0$ ausgesondert, die wegen (36,32) mit

$$\sin 2(\beta - \gamma) = 0$$

identisch ist. Infolgedessen sind die Profile mit einer vom Anstellwinkel unabhängigen Druckpunktslage dadurch gekennzeichnet, daß ihre erste und ihre zweite Achse zueinander parallel verlaufen.

§ 37. Der Profilmittelpunkt als konformer Schwerpunkt der Profilkontur.

Zu einer interessanten mechanischen Deutung des Profilmittelpunkts M werden wir im Anschluß an Ph. Frank und K. Löwner¹⁾ durch die folgende Überlegung geführt. Wir gehen von der Identität

$$\int_{(C)} z \cdot \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| |dz| = m \cdot \int_{(C)} \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| |dz| + \int_{(C)} (z - m) \cdot \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| |dz| \quad (37,1)$$

¹⁾ Vgl. Ph. Frank und K. Löwner, Math. Zs. Bd. 3, S. 78, 1919.

aus, in der C wieder die Kontur des Tragflächenprofils B mit dem durch $z = m$ gegebenen Profilmittelpunkt M bedeuten soll. Führen wir in dem zweiten der rechts stehenden Integrale durch die zu (31,8) inverse Substitution

$$z = z(\zeta) \quad (37,11)$$

mit

$$\zeta = m + a \cdot e^{i\vartheta} \quad \text{und} \quad \frac{d\zeta}{d\vartheta} = i \cdot a \cdot e^{i\vartheta} \quad (37,12)$$

den Winkel ϑ als Integrationsvariable ein, so wird

$$\begin{aligned} \int_{(C)} (z - m) \cdot \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| |dz| &= \int_0^{2\pi} \{z(\zeta) - m\} \cdot \left| \frac{d\zeta}{d\vartheta} \cdot \frac{d\vartheta}{dz} \right| \cdot \left| \frac{dz}{d\vartheta} \right| d\vartheta \\ &= a \cdot \int_0^{2\pi} \{z(\zeta) - m\} d\vartheta \end{aligned}$$

oder

$$\int_{(C)} (z - m) \cdot \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| |dz| = a \cdot \int_0^{2\pi} z(\zeta) d\vartheta - 2\pi am. \quad (37,13)$$

Nun muß sich, da die durch (31,8) vermittelte Abbildung umkehrbar eindeutig ist, die zu (31,8) inverse Funktion (37,11) in eine im Außengebiet eines mit hinreichend großem Radius um den Nullpunkt der Z -Ebene geschlagenen Kreises absolut und gleichmäßig konvergierende Reihe von der Form

$$z = z(\zeta) = \zeta + \frac{b_1}{\zeta} + \frac{b_2}{\zeta^2} + \frac{b_3}{\zeta^3} + \dots \quad (37,2)$$

entwickeln lassen, deren Koeffizienten b_ν ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) wir dadurch bestimmen können, daß wir in die in (34,1) angeschriebene Entwicklung von (31,8) für z den durch (37,2) gegebenen Ausdruck eintragen, alsdann die rechte Seite nach fallenden Potenzen von ζ umordnen und schließlich die Koeffizienten aller von ζ selbst verschiedenen Potenzen von ζ gleich Null setzen. Durch Ausführung dieser Vorschrift ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 &= 0, \\ a_2 + b_2 &= 0, \\ a_3 - a_1 b_1 + b_3 &= 0, \\ &\dots \end{aligned}$$

aus dem sich die Koeffizienten b_ν Schritt für Schritt berechnen lassen. Wir erhalten somit

$$z = z(\zeta) = \zeta - \frac{a_1}{\zeta} - \frac{a_2}{\zeta^2} - \frac{a_3 + a_1^2}{\zeta^3} - \dots, \quad (37,21)$$

und hieraus läßt sich gemäß (21,7) und (21,71) eine Entwicklung von der Form

$$z = Z(\zeta^*) \\ = \zeta^* + m - \frac{a_1}{\zeta^*} - \frac{a_2 - a_1 m}{\zeta^{*2}} - \frac{a_3 + a_1^2 - 2a_2 m + a_1 m^2}{\zeta^{*3}} - \dots \quad (37,3)$$

mit

$$\zeta^* = \zeta - m \quad (37,31)$$

ableiten, die für jedes der Bedingung $|\zeta^*| > a$ genügende ζ absolut und gleichmäßig konvergieren muß, da ja $z(\zeta)$ eine im ganzen Außengebiet des Grundkreises k der Z -Ebene reguläre analytische Funktion von ζ darstellt. Setzen wir also

$$\zeta^* = \varrho \cdot e^{i\vartheta} \quad \text{mit} \quad \varrho > a,$$

so ergibt sich gemäß (37,3)

$$\left[\int_0^{2\pi} z d\vartheta \right]_{\zeta^* = \varrho \cdot e^{i\vartheta}} = \varrho \cdot \int_0^{2\pi} e^{i\vartheta} d\vartheta + m \cdot \int_0^{2\pi} d\vartheta - \frac{a_1}{\varrho} \cdot \int_0^{2\pi} e^{-i\vartheta} d\vartheta \\ - \frac{a_2 - a_1 m}{\varrho^2} \cdot \int_0^{2\pi} e^{-i \cdot 2\vartheta} d\vartheta - \dots,$$

woraus wegen (25,22)

$$\left[\int_0^{2\pi} z d\vartheta \right]_{\zeta^* = \varrho \cdot e^{i\vartheta}} = 2\pi m$$

folgt. Da sich aber die Funktion $z(\zeta)$, wie den in § 24 gemachten Ausführungen zu entnehmen ist, bis auf den Grundkreis k stetig fortsetzen läßt, so wird

$$\left[\int_0^{2\pi} z d\vartheta \right]_{\zeta^* = a \cdot e^{i\vartheta}} = \lim_{\varrho \rightarrow a} \left[\int_0^{2\pi} z d\vartheta \right]_{\zeta^* = \varrho \cdot e^{i\vartheta}} = 2\pi m, \quad (37,4)$$

womit (37,13) die Beziehung

$$\int_{(C)} (z - m) \cdot \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| |dz| = 0$$

liefert. Demnach reduziert sich (37,1) auf

$$\int_{(C)} z \cdot \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| |dz| = m \cdot \int_{(C)} \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| |dz|$$

oder

$$\int_{(C)} z \cdot \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| ds = m \cdot \int_{(C)} \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| ds,$$

da ja $|dz|$ mit dem „Bogenelement“ ds der Kurve C identisch ist. Indem wir dann schließlich

$$z = x + iy \quad \text{und} \quad m = x_M + iy_M$$

setzen, bekommen wir die Gleichung

$$\int_{(C)} x \cdot \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| ds + i \cdot \int_{(C)} y \cdot \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| ds = x_M \cdot \int_{(C)} \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| ds + i \cdot y_M \cdot \int_{(C)} \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| ds,$$

aus der sich durch Trennung von Reellem und Imaginärem die beiden Relationen

$$x_M = \frac{\int_{(C)} x \cdot \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| ds}{\int_{(C)} \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| ds} \quad \text{und} \quad y_M = \frac{\int_{(C)} y \cdot \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| ds}{\int_{(C)} \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| ds} \quad (37,5)$$

entnehmen lassen, die den folgenden merkwürdigen Satz enthalten: *Der Mittelpunkt M eines Profils B läßt sich als der Schwerpunkt einer Massenbelegung deuten, die mit der linearen Dichte $\left| \frac{d\zeta}{dz} \right|$ längs der Profilkontur C ausgebreitet ist.* Infolgedessen wird M auch als der *konforme Schwerpunkt* der Profilkontur C bezeichnet, wobei der Zusatz „konform“ die Tatsache zum Ausdruck bringen soll, daß die Massenbelegung der Kontur C durch den absoluten Betrag der Ableitung der Funktion $\zeta = f(z)$ gegeben ist, durch die das Außengebiet von C auf das Außengebiet des Grundkreises k umkehrbar eindeutig und konform abgebildet wird. In entsprechender Weise werden wir in diesem Zusammenhang kurz von der *konform belegten Profilkontur* reden.

Im Anschluß hieran ergibt sich, wie von *W. Müller*¹⁾ bemerkt wurde, eine einfache mechanische Deutung der zweiten Achse des Profils. Sei G eine durch den Profilmittelpunkt M hindurchgelegte Gerade, die gegen die Richtung der zweiten Achse um den Winkel ω im positiven Sinn gedreht ist. Da die zweite Achse mit der positiven Richtung der reellen Achse den Winkel γ einschließt, so ist demnach G gegen die positive Richtung der reellen Achse um den Winkel $\gamma + \omega$ geneigt. Nun ist das *Deviationsmoment* Π_G der konform belegten Profilkontur C in Bezug auf die Gerade G durch

$$\Pi_G = \int_{(C)} x^* \cdot y^* \cdot \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| ds = \int_{(C)} x^* \cdot y^* \cdot \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| |dz| \quad (37,6)$$

gegeben, falls x^* und y^* die auf dasjenige rechtwinklige System bezogenen Koordinaten bedeuten, das den Profilmittelpunkt M als Anfangspunkt und

¹⁾ Vgl. *W. Müller*, *Zs. f. ang. Math. u. Mech.* Bd. 4, S. 186; 1924.

die Gerade G als X^* -Achse besitzt. Gehen wir auf unser ursprünglich benutztes XY -System zurück, so ist

$$x^* = (x - x_M) \cdot \cos(\gamma + \omega) + (y - y_M) \cdot \sin(\gamma + \omega),$$

$$y^* = (y - y_M) \cdot \cos(\gamma + \omega) - (x - x_M) \cdot \sin(\gamma + \omega)$$

zu setzen, so daß

$$\begin{aligned} x^* \cdot y^* &= (x - x_M) \cdot (y - y_M) \cdot \{\cos^2(\gamma + \omega) - \sin^2(\gamma + \omega)\} \\ &\quad - \{(x - x_M)^2 - (y - y_M)^2\} \sin(\gamma + \omega) \cdot \cos(\gamma + \omega) \end{aligned}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} x^* \cdot y^* &= (x - x_M) \cdot (y - y_M) \cdot \cos 2(\gamma + \omega) \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \{(x - x_M)^2 - (y - y_M)^2\} \cdot \sin 2(\gamma + \omega) \end{aligned} \right\} \quad (37,61)$$

wird. Die rechte Seite dieser Gleichung stellt aber den Imaginärteil der Funktion

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \cdot (z - m)^2 \cdot e^{-i \cdot 2(\gamma + \omega)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \{(x - x_M) + i \cdot (y - y_M)\}^2 \cdot \{\cos 2(\gamma + \omega) - i \cdot \sin 2(\gamma + \omega)\} \\ &= \frac{1}{2} \{(x - x_M)^2 - (y - y_M)^2\} \cdot \cos 2(\gamma + \omega) + (x - x_M) \cdot (y - y_M) \cdot \sin 2(\gamma + \omega) \\ &\quad + i \cdot [(x - x_M) \cdot (y - y_M) \cdot \cos 2(\gamma + \omega) - \frac{1}{2} \cdot \{(x - x_M)^2 - (y - y_M)^2\} \cdot \sin 2(\gamma + \omega)] \end{aligned}$$

dar, so daß, falls wir vorübergehend die durch

$$\begin{aligned} \Pi_H &= \int_{(C)} \left[\frac{1}{2} \cdot \{(x - x_M)^2 - (y - y_M)^2\} \cdot \cos 2(\gamma + \omega) \right. \\ &\quad \left. + (x - x_M) \cdot (y - y_M) \cdot \sin 2(\gamma + \omega) \right] \cdot \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| |dz| \end{aligned}$$

definierte Größe Π_H einführen, gemäß (37,6) und (37,61)

$$\Pi_H + i \cdot \Pi_G = \frac{1}{2} \cdot e^{-i \cdot 2(\gamma + \omega)} \cdot \int_{(C)} (z - m)^2 \cdot \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| |dz|$$

wird, wofür wir mit Benutzung von (37,11) und (37,12) auch

$$\Pi_H + i \cdot \Pi_G = \frac{a}{2} \cdot e^{-i \cdot 2(\gamma + \omega)} \cdot \left\{ \int_0^{2\pi} z^2(\zeta) d\vartheta - 2m \cdot \int_0^{2\pi} z(\zeta) d\vartheta + m^2 \cdot \int_0^{2\pi} d\vartheta \right\}$$

oder schließlich unter Berücksichtigung von (37,4)

$$\Pi_H + i \cdot \Pi_G = \frac{a}{2} \cdot e^{-i \cdot 2(\gamma + \omega)} \cdot \left\{ \int_0^{2\pi} z^2(\zeta) d\vartheta - 2\pi m^2 \right\} \quad (37,62)$$

schreiben können. Bedienen wir uns dann wieder der Entwicklung (37,3), so wird

$$z^2 = \zeta^{*2} + 2m \cdot \zeta^* + (m^2 - 2a_1) - \frac{2a_2}{\zeta^*} - \dots, \quad$$

woraus wie oben

$$\left[\int_0^{2\pi} z^2(\zeta) d\vartheta \right]_{\zeta^* = a \cdot e^{i\vartheta}} = 2\pi \cdot (m^2 - 2a_1)$$

folgt. Demnach geht (37,62) mit Beachtung von (35,31) in

$$\Pi_H + i \cdot \Pi_G = -2\pi a \cdot a_1 \cdot e^{-i \cdot 2(\gamma + \omega)} = 2\pi a \cdot c_1^2 \cdot e^{-i \cdot 2\omega}$$

über, und hieraus ergibt sich durch Trennung von Reellem und Imaginärem die Beziehung

$$\Pi_G = -2\pi a c_1^2 \cdot \sin(2\omega). \quad (37,7)$$

Diese Gleichung zeigt aber, daß Π_G für $\omega = 0$ und für $\omega = \frac{\pi}{2}$ verschwindet,

und da der Winkel ω definitionsgemäß die Neigung der Geraden G gegen die zweite Achse des Profils mißt, so stellen demnach die durch den Profilmittelpunkt M hindurchgelegte zweite Achse sowie die auf ihr in M errichtete Senkrechte die beiden Hauptträgheitsachsen der konform belegten Profilkontur dar.

Zu einer weiteren interessanten Relation werden wir schließlich durch Berechnung des auf den Profilmittelpunkt M bezogenen *polaren Trägheitsmoments* Θ_0 der konform belegten Profilkontur C geführt. Da der Abstand eines auf C gelegenen Punktes z vom Punkte M durch $|z - m|$ gegeben ist, so erhalten wir den Ansatz

$$\Theta_0 = \int_{(C)} |z - m|^2 \cdot \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| ds = \int_{(C)} |z - m|^2 \cdot \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| |dz|,$$

wofür wir mit (37,11) und (37,12) auch

$$\Theta_0 = a \cdot \int_0^{2\pi} |z(\zeta) - m|^2 d\vartheta \quad (37,8)$$

schreiben können. Indem wir dann (37,3) nach Einführung einfacherer Koeffizientenbezeichnungen durch

$$z - m = \zeta^* + \frac{b_1^*}{\zeta^*} + \frac{b_2^*}{\zeta^{*2}} + \frac{b_3^*}{\zeta^{*3}} + \dots \quad (37,81)$$

ersetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
 |z(\zeta) - m|^2 &= \{z(\zeta) - m\} \cdot \overline{\{z(\zeta) - m\}} \\
 &= \zeta^* \cdot \overline{\zeta^*} \cdot \left\{ 1 + \frac{b_1^*}{\zeta^{*2}} + \frac{b_2^*}{\zeta^{*3}} + \frac{b_3^*}{\zeta^{*4}} + \dots \right\} \cdot \left\{ 1 + \frac{\overline{b_1^*}}{\overline{\zeta^{*2}}} + \frac{\overline{b_2^*}}{\overline{\zeta^{*3}}} + \frac{\overline{b_3^*}}{\overline{\zeta^{*4}}} + \dots \right\} \\
 &= a^2 \cdot \left\{ 1 + \frac{b_1^*}{a^2} \cdot e^{-i \cdot 2\vartheta} + \frac{b_2^*}{a^3} \cdot e^{-i \cdot 3\vartheta} + \frac{b_3^*}{a^4} \cdot e^{-i \cdot 4\vartheta} + \dots \right\} \\
 &\quad \cdot \left\{ 1 + \frac{\overline{b_1^*}}{a^2} \cdot e^{i \cdot 2\vartheta} + \frac{\overline{b_2^*}}{a^3} \cdot e^{i \cdot 3\vartheta} + \frac{\overline{b_3^*}}{a^4} \cdot e^{i \cdot 4\vartheta} + \dots \right\} \\
 &= a^2 \cdot \left\{ 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|b_{\nu}^*|^2}{a^{2(\nu+1)}} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu}^* \cdot e^{i \cdot \nu\vartheta} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_{\nu}^* \cdot e^{-i \cdot \nu\vartheta} \right\},
 \end{aligned}$$

und hiermit liefert (37,8) wegen (25,22)

$$\Theta_0 = 2\pi a^3 \cdot \left\{ 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|b_{\nu}^*|^2}{a^{2(\nu+1)}} \right\}.$$

Für den durch

$$\Theta_0 = R_0^2 \cdot \int_{(C)} \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| ds = R_0^2 \cdot \int_{(C)} \left| \frac{d\zeta}{dz} \right| |dz| = a R_0^2 \cdot \int_0^{2\pi} d\vartheta = 2\pi a \cdot R_0^2$$

definierten *polaren Trägheitsradius* R_0 ergibt sich somit die Relation

$$R_0^2 = a^2 \cdot \left\{ 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|b_{\nu}^*|^2}{a^{2(\nu+1)}} \right\},$$

so daß

$$R_0^2 - a^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|b_{\nu}^*|^2}{a^{2\nu}} \quad (37,9)$$

wird. Und da natürlich a als der polare Trägheitsradius des konform belegten Grundkreises k anzusehen ist, so läßt sich das in (37,9) enthaltene Resultat dahin zum Ausdruck bringen, daß sich die Quadrate der polaren Trägheitsradien der konform belegten Profilkontur C und des konform be-

legten Grundkreises k um den Betrag $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|b_{\nu}^*|^2}{a^{2\nu}}$ voneinander unterscheiden.

§ 38. Allgemeine Theorie der Profilparameter.

Wie bereits zu Beginn von § 36 betont wurde, kommen in den Formeln, die wir für die Größe sowie für das statische Moment des Auftriebs eines beliebigen Tragflächenprofils gefunden haben, die durch die Wahl verschiedenartiger Profile bedingten Unterschiede nur insofern zur Geltung, als in jenen Formeln gewisse wenige Parameter auftreten, deren Werte von der Profilform abhängig sind. Und zwar sind dies:

für die Größe des Auftriebs gemäß (34,6) bzw. (36,11)

(1) der Radius a des Grundkreises k ,

(2) der Winkel β bzw. die Richtung der ersten Achse des Profils;

für das statische Moment des Auftriebs gemäß (35,5) bzw. (36,21)

(3) die durch die komplexe Zahl $z = m$ gekennzeichnete Lage des Profilmittelpunktes M ,

(4) der Winkel γ bzw. die Richtung der zweiten Achse des Profils,

(5) die positiv reelle Größe c_1 .

Wird als Momentenbezugspunkt der Profilbrennpunkt gewählt, so tritt anstelle von (3)

(3a) die durch die in (36,3) angeschriebene komplexe Zahl $z = z_F$ gekennzeichnete Lage des Profilbrennpunktes F ,

und (4) und (5) lassen sich gemäß (36,32) ersetzen durch

(4a) die Größe h .

Ist das Problem der Abbildung des Außengebiets einer vorgelegten Profilkontur C auf das Außengebiet des Grundkreises k gelöst, so sind damit auch die Werte der soeben aufgezählten Parameter für das von C berandete Profil B gefunden. Mit der Lösung dieser Aufgabe werden wir uns im nächsten Kapitel zu befassen haben. Es lassen sich jedoch gewisse Abschätzungen in Form von Ungleichungen angeben, die aus der allgemeinen Theorie der konformen Abbildung zu entnehmen sind, und die für die Parameterwerte gewisse Schranken liefern, die ohne Rücksicht auf die spezielle Gestalt des Profils Gültigkeit besitzen. Der Herleitung einiger solcher Abschätzungen sollen jetzt die nachstehenden Ausführungen gewidmet sein¹⁾.

Wenden wir den in (26,31) notierten Spezialfall des *Faber-Bieberbachschen* Flächensatzes (26,3) auf die durch (37,3) dargestellte, zur Abbildungsfunktion (31,8) inverse Funktion $z = z(\zeta)$ an, so ergibt sich durch Vergleich mit (26,1) die Abschätzung

$$|a_1| \leq a^2, \quad (38,1)$$

aus der wegen (35,31)

$$c_1^2 \leq a^2 \quad \text{oder} \quad \frac{c_1^2}{a} \leq a \quad (38,11)$$

folgt. Da aber die Größe $\frac{c_1^2}{a}$ den Abstand des Profilbrennpunktes F vom

¹⁾ Vgl. hierzu die in der Fußnote auf S. 138 zitierte Arbeit von *R. v. Mises*.

Profilmittelpunkt M mißt, so besagt (38,11), daß der Brennpunkt des Profils im allgemeinen in der vom Grundkreis k berandeten Kreisfläche, höchstens aber auf dem Grundkreis selbst gelegen sein muß. Anwendung von (26,3) auf (37,81) liefert durch Vergleich mit (26,1)

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu \cdot |b_{\nu}^*|^2}{a^{2(\nu+1)}} \leq 1,$$

so daß erst recht

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|b_{\nu}^*|^2}{a^{2\nu}} \leq a^2$$

gilt. Demnach ist gemäß (37,9) der polare Trägheitsradius R_0 der konform belegten Profilkontur C der Einschränkung

$$R_0 \leq a \cdot \sqrt{2} \quad (38,2)$$

unterworfen.

Ist z_C ein beliebiger, der Berandung C des in der Z -Ebene gelegenen Profils B angehörender Punkt, so wird das Außengebiet B' von C durch die Translation $t = z - z_C$ auf das Außengebiet einer Kurve C^* der T -Ebene abgebildet, die hinsichtlich ihrer Gestalt vollständig mit C übereinstimmt, die jedoch in dem der Stelle z_C entsprechenden Punkt der T -Ebene durch den Nullpunkt $t = 0$ dieser Ebene hindurchgeht. Infolgedessen führt die Funktion [vgl. (37,3)]

$$t = Z(\zeta^*) - z_C = \zeta^* + (m - z_C) - \frac{a_1}{\zeta^*} - \frac{a_2 - a_1 \cdot m}{\zeta^{*2}} - \dots \quad (38,3)$$

das Außengebiet des Grundkreises k der Z -Ebene umkehrbar eindeutig und konform in das den Nullpunkt nicht enthaltende Außengebiet der eben genannten Kurve C^* der T -Ebene über, so daß (26,41) durch Vergleich von (38,3) mit (26,4) die Relation

$$|m - z_C| \leq 2a \quad (38,31)$$

ergibt. Da diese Beziehung für jeden Randpunkt z_C bestehen muß, so ist somit der Profilmittelpunkt M stets so gelegen, daß sich das ganze Profil B in derjenigen Kreisfläche befindet, die von dem um M als Mittelpunkt mit der doppelten Länge des Grundkreisradius a geschlagenen Kreis berandet wird.

Sind $z_C^{(1)}$ und $z_C^{(2)}$ zwei beliebige Randpunkte des Profils, so wird wegen (38,31)

$$|z_C^{(1)} - z_C^{(2)}| = |(z_C^{(1)} - m) + (m - z_C^{(2)})| \leq |z_C^{(1)} - m| + |m - z_C^{(2)}| \leq 4a,$$

mithin

$$a \geq \frac{1}{4} \cdot |z_C^{(1)} - z_C^{(2)}|. \quad (38,32)$$

Bezeichnen wir daher das Maximum des Abstandes zweier Punkte der Profilkontur C als den größten Durchmesser des Profils B , so lehrt (38,32),

daß der Radius des Grundkreises mindestens gleich dem vierten Teil des größten Profildurchmessers ist.

Um auch zu einer oberen Schranke für den Grundkreisradius a zu gelangen, denken wir uns um M als Mittelpunkt einen Kreis k_1 mit dem Radius $r_1 > a$ geschlagen, und bezeichnen die von k_1 sowie von dem Grundkreis k berandete Kreisringfläche der Z -Ebene mit B_0 . Ist dann $d(\zeta^*)$ die obere Grenze von $|Z(\zeta_1^*) - Z(\zeta_2^*)|$, unter ζ_1 und ζ_2 zwei beliebig in B_0 gelegene Stellen verstanden, so gilt sicher

$$|Z(\zeta_3^*) - Z(\zeta_4^*)| \leq d(\zeta^*), \quad (38,41)$$

falls

$$\zeta_3 = m + \varrho \cdot e^{i\vartheta} \text{ und } \zeta_4 = m - \varrho \cdot e^{i\vartheta} \quad (38,42)$$

mit

$$a < \varrho < r_1 \quad (38,43)$$

gewählt wird. Wegen (37,81) und (38,42) wird nun

$$Z(\zeta_3^*) = \varrho \cdot e^{i\vartheta} + m + \frac{b_1^*}{\varrho} \cdot e^{-i\vartheta} + \frac{b_2^*}{\varrho^2} \cdot e^{-i \cdot 2\vartheta} + \frac{b_3^*}{\varrho^3} \cdot e^{-i \cdot 3\vartheta} + \dots$$

und

$$Z(\zeta_4^*) = -\varrho \cdot e^{i\vartheta} + m - \frac{b_1^*}{\varrho} \cdot e^{-i\vartheta} + \frac{b_2^*}{\varrho^2} \cdot e^{-i \cdot 2\vartheta} - \frac{b_3^*}{\varrho^3} \cdot e^{-i \cdot 3\vartheta} + \dots,$$

mithin

$$Z(\zeta_3^*) - Z(\zeta_4^*) = 2\varrho \cdot e^{i\vartheta} + \frac{2b_1^*}{\varrho} \cdot e^{-i\vartheta} + \frac{2b_3^*}{\varrho^3} \cdot e^{-i \cdot 3\vartheta} + \dots$$

oder

$$\{Z(\zeta_3^*) - Z(\zeta_4^*)\} \cdot e^{-i\vartheta} = 2\varrho + \frac{2b_1^*}{\varrho} \cdot e^{-i \cdot 2\vartheta} + \frac{2b_3^*}{\varrho^3} \cdot e^{-i \cdot 4\vartheta} + \dots,$$

so daß sich unter Beachtung von (25,22)

$$\int_0^{2\pi} \{Z(\zeta_3^*) - Z(\zeta_4^*)\} \cdot e^{-i\vartheta} d\vartheta = 4\pi\varrho \quad (38,44)$$

ergibt. Andererseits liefert (38,41) die Abschätzung

$$\left| \int_0^{2\pi} \{Z(\zeta_3^*) - Z(\zeta_4^*)\} \cdot e^{-i\vartheta} d\vartheta \right| \leq 2\pi \cdot d(\zeta^*),$$

aus der in Verbindung mit (38,44)

$$2\varrho \leq d(\zeta^*)$$

folgt. Demnach wird, da gemäß (38,43) für $r_1 \rightarrow a$ auch $\varrho \rightarrow a$ gilt,

$$a \leq \lim_{r_1 \rightarrow a} d(\zeta^*). \quad (38,45)$$

Nun stellt aber $\lim_{r_1 \rightarrow a} d(\zeta^*)$ definitionsgemäß die obere Grenze von

$$|Z(\zeta_k^{(1)*}) - Z(\zeta_k^{(2)*})| = |z_C^{(1)} - z_C^{(2)}|$$

dar, falls $\zeta_k^{(1)}$ und $\zeta_k^{(2)}$ zwei beliebig auf dem Grundkreis k gelegene Stellen der Z -Ebene sowie $z_C^{(1)}$ und $z_C^{(2)}$ die ihnen durch (37,81) zugeordneten, auf der Profilkontur C gelegenen Bildpunkte der Z -Ebene bedeuten. Infolgedessen zeigt (38,45), daß stets

$$a \leq \frac{1}{2} \cdot |z_C^{(1)} - z_C^{(2)}| \quad (38,46)$$

gelten muß, mithin der Radius des Grundkreises k eines Profils B höchstens gleich der Hälfte des größten Profildurchmessers sein kann.

Wie wir oben gesehen haben, ist der Profilbrennpunkt F im allgemeinen im Inneren der von dem Grundkreis k berandeten Kreisfläche gelegen. Um zu einer unteren Grenze seines Abstandes von k zu gelangen, betrachten wir die größte, noch ganz dem Profil B angehörende Kreisfläche κ_0 , deren Berandung k_0 den Radius r_0 besitzen sowie die Stelle z_0 zum Mittelpunkt haben möge. Dann bringt die durch $t = z - z_0$ besorgte Parallelverschiebung den Mittelpunkt von k_0 in den Nullpunkt der T -Ebene, und durch die Funktion

$$t = t(\zeta^*) = Z(\zeta^*) - z_0 \quad (38,5)$$

wird daher das Außengebiet des Grundkreises k der Z -Ebene umkehrbar eindeutig und konform auf das Außengebiet B' der jetzt in der T -Ebene gelegenen Profilkontur C derart abgebildet, daß dieses Außengebiet B' vollständig dem durch $|t| > r_0$ bestimmten Außengebiet κ'_0 des Kreises k_0 der T -Ebene angehört. Nun bildet aber, wie wir in § 20 gesehen haben, die Funktion

$$t^* = t + \frac{r_0^2}{t} \quad (38,51)$$

das Außengebiet κ'_0 des Kreises k_0 der T -Ebene umkehrbar eindeutig und konform auf die volle T^* -Ebene ab, die längs ihrer reellen Achse durch einen von dem Punkt $-2r_0$ bis zum Punkt $+2r_0$ geführten Einschnitt aufgeschlitzt ist. Infolgedessen vermittelt die durch Eintragen von (38,5) in (38,51) erhaltene Funktion

$$t^* = t^*(\zeta^*) = Z(\zeta^*) - z_0 + \frac{r_0^2}{Z(\zeta^*) - z_0} \quad (38,52)$$

eine umkehrbar eindeutige und konforme Abbildung des Außengebiets des in der Z -Ebene gelegenen Grundkreises k auf ein gewisses nicht beschränktes Gebiet der in der genannten Weise aufgeschlitzten T^* -Ebene. Setzen wir daher

$$t^* = t^*(\zeta^*) = \zeta^* + a_0 + \frac{a_1}{\zeta^*} + \frac{a_2}{\zeta^{*2}} + \frac{a_3}{\zeta^{*3}} + \dots, \quad (38,53)$$

so muß auf Grund des *Faber-Bieberbach*schen Flächensatzes, dessen Voraussetzungen hier ja erfüllt sind, gemäß (26,31) die Relation

$$|a_1| \leq a^2 \quad (38,54)$$

bestehen. Um den Koeffizienten a_1 zu berechnen, haben wir für $Z(\zeta^*)$ die in (37,3) angeschriebene Entwicklung in (38,52) einzutragen, was wegen

$$t(\zeta^*) = Z(\zeta^*) - z_0 = \zeta^* + (m - z_0) \frac{a_1}{\zeta^*} - \frac{a_2 - a_1 m}{\zeta^{*2}} - \dots \quad (38,55)$$

und

$$\frac{r_0^2}{Z(\zeta^*) - z_0} = \frac{r_0^2}{\zeta^*} - \frac{r_0^2 \cdot (m - z_0)}{\zeta^{*2}} - \dots$$

die Entwicklung

$$t^* = t^*(\zeta^*) = \zeta^* + (m - z_0) + \frac{r_0^2 - a_1}{\zeta^*} + \frac{a_1 m - a_2 - r_0^2 \cdot (m - z_0)}{\zeta^{*2}} + \dots$$

liefert. Durch Vergleich dieser Reihe mit (38,53) folgt insbesondere

$$a_1 = r_0^2 - a_1,$$

so daß gemäß (38,54)

$$|r_0^2 - a_1| \leq a^2$$

oder

$$|a_1| \leq a^2 - r_0^2 \quad (38,56)$$

gilt. Mit (35,31) ergibt sich daher die Relation

$$\frac{|a_1|}{a} = \frac{c_1^2}{a} \leq a - \frac{r_0^2}{a}$$

oder

$$a - \frac{c_1^2}{a} \geq \frac{r_0^2}{a}, \quad (38,6)$$

und da $\frac{c_1^2}{a}$ den Abstand des Profilbrennpunktes F vom Mittelpunkt M des Grundkreises k , mithin $a - \frac{c_1^2}{a}$ den Abstand des Punktes F von k mißt, so lehrt (38,6), daß der Abstand des Profilbrennpunktes F vom Grundkreis k im allgemeinen größer als $\frac{r_0^2}{a}$ ist, unter r_0 den Radius der größten Kreisfläche verstanden, die sich dem Profil B einbetten läßt.

Im Anschluß hieran kann schließlich der in (38,31) steckende Satz, daß das Profil B im allgemeinen im Inneren der um den Profilmittelpunkt M mit dem Radius $2a$ gelegten Kreisfläche enthalten ist, dahin verschärft werden, daß sich sogar das Innengebiet jedes solchen Kreises, der durch konzentrische Verdoppelung eines ganz in B verlaufenden Kreises erzeugt wird, im Inneren der mit dem Radius $2a$ um den Profilmittelpunkt M gelegten Kreisfläche befinden muß. Zum Beweis dieser Behauptung genügt es natürlich zu zeigen, daß sie für diejenige Kreisfläche richtig ist, zu der man durch

konzentrische Verdoppelung des größten noch ganz in B enthaltenen Kreises k_0 gelangt. Und da z_0 der Mittelpunkt sowie r_0 der Radius von k_0 sein sollte, so muß demnach (vgl. Fig. 29) bewiesen werden, daß die Relation

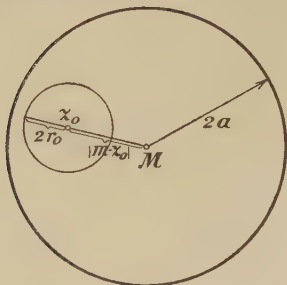


Fig. 29.

$$|m - z_0| + 2r_0 \leq 2a \quad (38,7)$$

besteht. Dies gelingt nun tatsächlich auf folgende Weise. Wie wir auf S. 109 gesehen haben, erfüllt die durch

$$w = w(\zeta^*) = \sqrt{t(\zeta^{*2})} \quad (38,71)$$

definierte Funktion $w(\zeta^*)$, falls wieder ein bestimmter Zweig der Quadratwurzel gewählt wird, hinsichtlich ihrer Abbildungseigenschaften dieselben Voraussetzungen wie die Funktion (38,5) bzw. (38,55), wobei jedoch a durch $\sqrt{a}$ und r_0 durch $\sqrt{r_0}$ zu ersetzen ist. Schreiben wir daher

$$w(\zeta^*) = \zeta^* + \beta_0 + \frac{\beta_1}{\zeta^*} + \frac{\beta_2}{\zeta^{*2}} + \frac{\beta_3}{\zeta^{*3}} + \dots, \quad (38,72)$$

so muß gemäß (38,56), wie durch Vergleich von (38,72) mit (38,55) folgt,

$$|\beta_1| \leq a - r_0 \quad (38,73)$$

gelten. Da aber gemäß (38,72)

$$\{w(\zeta^*)\}^2 = \zeta^{*2} + 2\beta_0 \cdot \zeta^* + (\beta_0^2 + 2\beta_1) + \frac{2\beta_2 + 2\beta_0 \cdot \beta_1}{\zeta^*} + \dots$$

sowie gemäß (38,55)

$$t(\zeta^{*2}) = \zeta^{*2} + (m - z_0) - \frac{a_1}{\zeta^{*2}} - \dots$$

wird, so ergibt sich wegen (38,71) durch Vergleich entsprechender Koeffizienten dieser beiden Reihen insbesondere

$$\beta_0 = 0 \quad \text{und} \quad m - z_0 = \beta_0^2 + 2\beta_1,$$

mithin

$$\beta_1 = \frac{1}{2} \cdot (m - z_0),$$

womit dann (38,73) sofort (38,7) liefert, was zu beweisen war.

Fünftes Kapitel.

Spezielle Ausführungen zur Theorie der
unendlich breiten Tragfläche.

§ 39. Vorbemerkungen.

Nachdem wir im vorhergehenden Kapitel die allgemeinen Grundlagen der Theorie des Auftriebs unendlich breiter Tragflächen entwickelt haben, wollen wir uns nunmehr mit der praktischen Anwendung der dabei erhaltenen Ergebnisse befassen. Hierzu bieten sich zwei voneinander prinzipiell verschiedene Wege dar. Wie wir nämlich gesehen haben, reduziert sich die Ermittlung der Größe sowie des statischen Moments des Auftriebs pro Einheit der Flügelbreite einer unbegrenzt ausgedehnten Tragfläche mit überall gleichem Profil letzten Endes auf die Lösung der Aufgabe, das Außengebiet B' der in die Z -Ebene verlegten Profilkontur C durch eine analytische Funktion $\zeta = f(z)$, die sich für hinreichend große Werte des absoluten Betrages von z in eine Reihe von der Form

$$\zeta = f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \cdots + \frac{a_\nu}{z^\nu} + \cdots \quad (39,1)$$

entwickeln läßt, umkehrbar eindeutig und konform auf das Außengebiet κ' eines als Grundkreis des von C berandeten Profils B bezeichneten Kreises k der Z -Ebene abzubilden, dessen Radius wir a und dessen Mittelpunkt wir M bzw. $\zeta_M = m$ genannt haben. Infolgedessen könnte man offenbar zunächst versuchen, diejenigen Profile, die sich in der Flugtechnik erfahrungsgemäß gut bewährt haben, auf ihre Grundkreise abzubilden, d. h. mit anderen Worten die zugehörigen speziellen analytischen Funktionen von der Form (39,1) tatsächlich herzustellen. Auf diese Weise würde man dann die Werte der zur Auftriebsbestimmung erforderlichen Parameter für beliebig vorgegebene Profilformen erhalten, und es ließe sich somit sehr leicht prüfen, inwieweit Theorie und Praxis miteinander im Einklang stehen. Andererseits aber kann man auch gewissermaßen umgekehrt vorgehen, indem man die zu (39,1) inverse Funktion $z = z(\zeta)$ betrachtet, die sich für hinreichend große Werte des absoluten Betrages von ζ gemäß (37,21) in eine Reihe von der Form

$$z = z(\zeta) = \zeta - \frac{a_1}{\zeta} - \frac{a_2}{\zeta^2} - \frac{a_3 + a_1^2}{\zeta^3} - \cdots \quad (39,2)$$

entwickeln läßt. Greifen wir nun eine spezielle Funktion dieser Art heraus, und wählen wir überdies einen bestimmten Kreis k der Z -Ebene als Grundkreis, so wird dadurch unter gewissen Bedingungen ein bestimmtes Profil definiert werden müssen. Dies wird nämlich immer dann der Fall sein, wenn der Kreis k durch die gewählte Funktion in eine geschlossene,

doppelpunktfreie Kurve C der Z -Ebene übergeführt wird, die entweder eine Ecke oder aber eine Spitze aufweist, und wenn dabei außerdem das Außengebiet κ' von k und das Außengebiet B' von C einander umkehrbar eindeutig zugeordnet sind. Da bei diesem Verfahren der Grundkreis k des zu konstruierenden Profils beliebig wählbar ist, so braucht man bloß eine geeignete Wahl des auf k gelegenen Bildpunktes ζ_S der Profilspitze S sowie der durch den Ansatz (36,3) gekennzeichneten Lage des Profilbrennpunktes F zu treffen, um zu *Profilformen mit vorgeschriebenen Werten aller für die Auftriebseigenschaften maßgebenden Parameter* zu gelangen.

Im folgenden werden wir nun zunächst den an zweiter Stelle genannten Weg einschlagen, der uns eine große Fülle von praktisch recht bedeutsamen Resultaten liefern wird. Inwiefern auch das zuerst formulierte Problem einer Lösung zugänglich ist, werden wir dann im letzten Paragraphen dieses Kapitels auseinanderzusetzen haben.

§ 40. Streckenprofile.

Als ein besonders einfaches Beispiel einer Funktion von der Form (39,2) darf der Ansatz

$$z = z(\zeta) = \zeta + \frac{c^2}{\zeta} \quad (40,1)$$

mit positiv reellem c bezeichnet werden, und so wollen wir ihn zum Ausgangspunkt unserer weiteren Untersuchungen wählen. Da hier $a_1 = -c^2$, mithin gemäß (35,31)

$$c_1 = c \quad \text{und} \quad \gamma = 0 \quad (40,11)$$

gilt, so muß bei sämtlichen mit Hilfe von (40,1) definierbaren Profilen die Richtung der zweiten Achse mit der Richtung der reellen Achse zusammenfallen.

Nehmen wir als Grundkreis k den um den Nullpunkt der Z -Ebene als Mittelpunkt mit dem Radius $a = c$ geschlagenen Kreis, so wissen wir aus

§ 20, daß das Außengebiet κ' von k durch (40,1) umkehrbar eindeutig und konform auf die volle Z -Ebene abgebildet wird, die längs der durch

$$-2c \leq x \leq +2c \quad (40,2)$$

dargestellten, auf der reellen Achse gelegenen Strecke aufgeschlitzt ist (vgl. Fig. 30). Eine solche doppelt zu durchlaufende

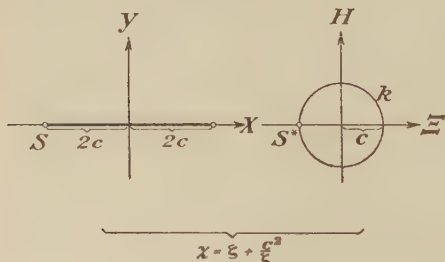


Fig. 30.

Strecke kann nun zwar streng genommen keineswegs als ein „Profil“ angesehen werden. Denn einerseits müßte ja der dazugehörige *ebene Trag-*

flügel eine verschwindende Dicke besitzen, und andererseits müßte er sowohl eine scharfe Hinterkante als auch eine scharfe Vorderkante aufweisen, was der von uns in Anlehnung an Erfahrungstatsachen getroffenen Voraussetzung einer abgerundeten Vorderseite widerspricht. Immerhin jedoch liegt es nahe, das *Streckenprofil* (40,2) gewissermaßen als Grenzfall eines sehr schlanken Profils mit einer hinteren Spitze S (vgl. Fig. 31) durchzurechnen, ohne sich dabei durch den Umstand stören zu lassen, daß die theoretisch ermittelte Strömung am vorderen Ende der Strecke eine unbegrenzt große Geschwindigkeit (vgl. S. 131) annehmen, mithin physikalisch sinnlos bleiben muß.

Da die Lage der Spitze S des Streckenprofils in der Z -Ebene durch $z_S = -2c$ gegeben ist, so gilt für ihren Bildpunkt ζ_S in der Z -Ebene gemäß (40,1) die Relation

$$-2c = \zeta_S + \frac{c^2}{\zeta_S},$$

aus der sich $\zeta_S = -c$ berechnet. Und da $m = 0$ zu setzen ist, so wird gemäß (32,4) der Parameter β gleich Null, so daß auch die erste Achse des Streckenprofils mit der reellen Achse zusammenfällt. Die Zirkulation J berechnet sich gemäß (32,5) zu

$$J = 4\pi c V \cdot \sin \alpha, \quad (40,3)$$

womit sich für die Größe des Auftriebs pro Einheit der Breite des ebenen Tragflügels gemäß (34,5) der Wert

$$A = 4\pi c \rho V^2 \cdot \sin \alpha \quad (40,4)$$

ergibt. Da der Profilmittelpunkt M mit dem Koordinatenanfangspunkt koinzidiert, so liefert (35,5) unter Beachtung von (40,11) die Beziehung

$$M_0 = M_M = 2\pi c^2 \rho V^2 \cdot \sin(2\alpha), \quad (40,5)$$

während gemäß (35,6)

$$h_0 = h_M = \frac{c \cdot \sin(2\alpha)}{2 \cdot \sin \alpha} = c \cdot \cos \alpha \quad (40,51)$$

wird. Die Lage des Druckpunkts D ist (vgl. Fig. 32) durch die Relation

$$MD = \frac{h_M}{\cos \alpha} = c \quad (40,6)$$

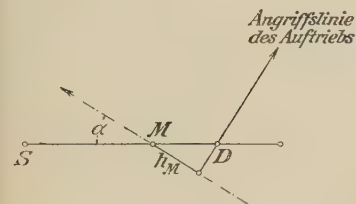


Fig. 32.

charakterisiert, und diese Gleichung zeigt, daß das Streckenprofil eine vom Anstellwinkel α unabhängige Druckpunktlage

besitzt, was ja auch wegen der hier bestehenden Parallelität der ersten und der zweiten Achse zu erwarten war (vgl. S. 140). Gemäß (36,3) wird schließlich $z_F = c$, so daß der Brennpunkt F wegen (40,6) mit dem Druckpunkt D zusammenfällt.

§ 41. Kreisbogenprofile.

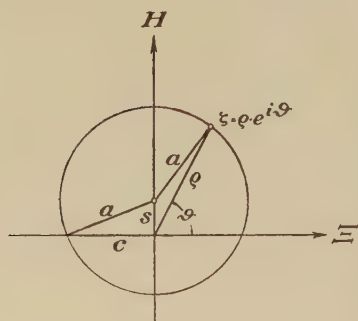


Fig. 33.

Um zu weiteren durch die Abbildungsfunktion (40,1) definierten Profilformen zu gelangen, müssen wir den im vorhergehenden Paragraphen benutzten Grundkreis k der Z -Ebene in geeigneter Weise abändern. Und zwar wollen wir nunmehr denjenigen Kreis als Grundkreis wählen, der durch die beiden auf der reellen Achse gelegenen Punkte $+c$ und $-c$ hindurchgeht, und dessen Mittelpunkt M sich auf der positiven imaginären Achse im Abstände s vom Nullpunkt befindet (vgl. Fig. 33). Dann wird also

$$\zeta_M = m = i \cdot s \quad \text{und} \quad a = \sqrt{c^2 + s^2}, \quad (41,1)$$

unter a wieder den Radius des Grundkreises k verstanden. Machen wir nun für jedes auf k gelegene ζ den Ansatz

$$\zeta = \rho \cdot e^{i\vartheta} = \rho \cdot (\cos \vartheta + i \cdot \sin \vartheta),$$

so wird gemäß (40,1)

$$z = \zeta + \frac{c^2}{\zeta} = \left(\rho + \frac{c^2}{\rho} \right) \cdot \cos \vartheta + i \cdot \left(\rho - \frac{c^2}{\rho} \right) \cdot \sin \vartheta,$$

woraus sich wegen $z = x + iy$ durch Trennung von Reellem und Imaginärem die beiden Beziehungen

$$x = \left(\rho + \frac{c^2}{\rho} \right) \cdot \cos \vartheta$$

und

$$y = \left(\rho - \frac{c^2}{\rho} \right) \cdot \sin \vartheta \quad (41,11)$$

ergeben, aus denen

$$x^2 \cdot \sin^2 \vartheta - y^2 \cdot \cos^2 \vartheta = 4c^2 \cdot \sin^2 \vartheta \cdot \cos^2 \vartheta \quad (41,12)$$

folgt. Wegen

$$a^2 = \rho^2 + s^2 - 2\rho s \cdot \sin \vartheta$$

gilt unter Beachtung von (41,1)

$$\rho^2 - c^2 = 2\rho s \cdot \sin \vartheta$$

oder

$$\varrho - \frac{c^2}{\varrho} = 2s \cdot \sin \vartheta,$$

womit (41,11) die Relation

$$y = 2s \cdot \sin^2 \vartheta \quad (41,13)$$

liefert. Infolgedessen wird

$$\sin^2 \vartheta = \frac{y}{2s} \quad \text{und} \quad \cos^2 \vartheta = 1 - \frac{y}{2s},$$

und wenn man diese Werte in (41,12) einführt, so ergibt sich

$$x^2 + \left(y + \frac{c^2 - s^2}{s} \right)^2 = \left(\frac{c^2 + s^2}{s} \right)^2. \quad (41,2)$$

Demnach liegen die durch (40,1) gelieferten Bildpunkte z aller auf dem Grund-

kreis k der Z -Ebene befindlichen Punkte ξ auf einem Kreis k_1 der Z -Ebene, dessen Gleichung eben durch (41,2) gegeben ist. Da aber gemäß (41,13) der Imaginärteil y jedes Bildpunktes z stets positiv sein muß, so entspricht einem vollen Umlauf längs des Grundkreises k der Z -Ebene ein doppeltes Durchlaufen desjenigen Kreisbogens der Z -Ebene, der durch die reelle Achse von dem Kreis k_1 nach oben abgeschnitten wird (vgl. Fig. 34). Das durch die Abbildungsfunktion (40,1) und den durch (41,1)

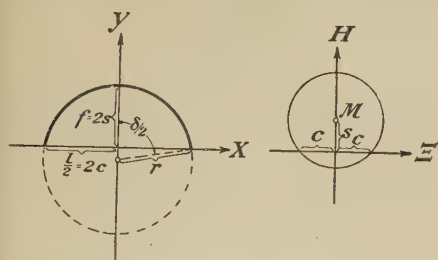


Fig. 34.

gekennzeichneten Grundkreis k definierte Profil ist somit ein *Kreisbogenprofil*, dessen Radius r gemäß (41,2) durch

$$r = \frac{c^2}{s} + s \quad (41,21)$$

gegeben ist. Seine „Pfeilhöhe“ f , d. h. seine höchste Erhebung über seine in die reelle Achse fallende Sehne, entnimmt man aus (41,13) zu

$$f = 2s, \quad (41,22)$$

und da (41,2) für $y = 0$ den Wert $x = \pm 2c$ ergibt, so muß die Sehnenslänge l des Kreisbogenprofils

$$l = 4c \quad (41,23)$$

betragen. Schließlich gilt für den Zentriwinkel δ

$$\delta = 2 \cdot \arcsin \left(\frac{2c}{r} \right) = 2 \cdot \arcsin \left(\frac{2cs}{c^2 + s^2} \right). \quad (41,24)$$

Auch das Kreisbogenprofil ist natürlich, genau wie das im vorhergehenden Paragraphen behandelte Streckenprofil, nur als ein idealer Grenzfall eines sehr schlanken Profils mit abgerundetem Vorderteil aufzufassen (vgl. Fig. 35). Wenn wir also im folgenden die Auftriebseigenschaften eines solchen Profils zum Ausdruck bringen, so müssen wir dabei wieder von dem Umstand absehen, daß die theoretisch ermittelte Strömung lediglich an dem hinteren Profilendpunkt S glatt abfließt, hingegen an der Vorder-

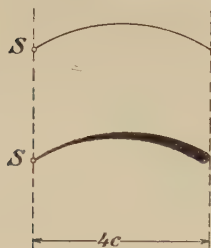


Fig. 35.

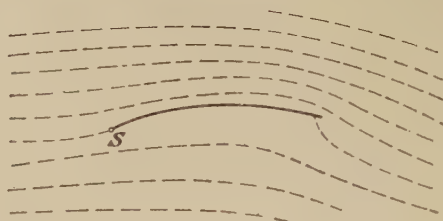


Fig. 36.

kante eine unbegrenzt große Geschwindigkeit annimmt. Der Verlauf der Stromlinien bei einer Kreisbogenprofilströmung ist in Fig. 36 zeichnerisch wiedergegeben.

Die Lage des Mittelpunktes M sowie der ersten Achse des Kreisbogenprofils ist aus Fig. 37 zu ersehen; letztere folgt sofort aus (41,1) in Verbindung mit der in § 40 erhaltenen Gleichung $\zeta_s = -c$, die hier ungeändert gültig bleibt. Für den Winkel β besteht dann gemäß (32,4) und (41,1) die Beziehung

$$c + i \cdot s = \sqrt{c^2 + s^2} \cdot e^{i\beta}$$

oder

$$\beta = \arctan \left(\frac{s}{c} \right), \quad (41,3)$$

und die Lage des Profilmittelpunktes F ist gemäß (36,3) unter Beachtung von (41,1) und (40,11) durch

$$z_F = i \cdot s + \frac{c^2}{\sqrt{c^2 + s^2}} \cdot e^{-i\beta} \quad (41,31)$$

bestimmt. Um F zu konstruieren, hat man an der Stelle $z = c$ ein Lot auf der reellen Achse der Z -Ebene von der Länge s zu errichten, und den Endpunkt dieses Lotes auf diejenige Gerade G zu projizieren, die den Profilmittelpunkt M mit der Stelle $z = c$ verbindet (vgl. Fig. 37). Denn wegen (41,3) ist die Gerade G gegen die positive Richtung der reellen Achse um den Winkel $-\beta$ geneigt, und überdies gilt auf Grund eines bekannten elementargeometrischen Satzes

$$MF \cdot \sqrt{c^2 + s^2} = c^2,$$

was sich wegen $MF = |m - z_F|$ mit (41,31) in Übereinstimmung befindet.

Für den Auftrieb A liefert (34,6) wegen (41,1) die Beziehung

$$A = 4\pi\rho V^2 \cdot \sqrt{c^2 + s^2} \cdot \sin(\alpha + \beta), \quad (41,4)$$

und das auf den Profilmittelpunkt M bezogene statische Moment M_M des Auftriebs ist gemäß (35,5) unter Beachtung von (40,11) durch

$$M_M = 2\pi c^2 \rho V^2 \cdot \sin(2\alpha) \quad (41,5)$$

gegeben, während für den zugehörigen Hebelarm h_M gemäß (35,6)

$$h_M = \frac{c^2 \cdot \sin(2\alpha)}{2 \cdot \sqrt{c^2 + s^2} \cdot \sin(\alpha + \beta)} = \frac{c^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sqrt{c^2 + s^2} \cdot \sin(\alpha + \beta)} \quad (41,51)$$

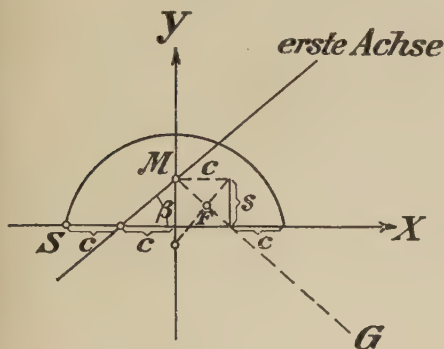


Fig. 37.

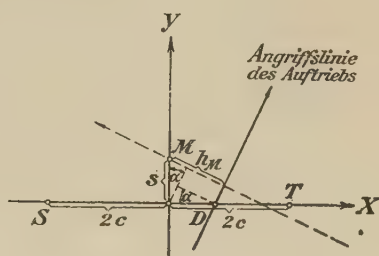


Fig. 38.

gilt. Ist D der auf der Profilhene gelegene Druckpunkt sowie O der Nullpunkt der Z -Ebene, so wird (vgl. Fig. 38)

$$OD \cdot \cos \alpha = h_M - s \cdot \sin \alpha,$$

woraus wegen (41,51)

$$OD = \frac{c^2 \cdot \sin \alpha}{\sqrt{c^2 + s^2} \cdot \sin(\alpha + \beta)} - s \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (41,6)$$

folgt. Hier hängt also, im Gegensatz zum Streckenprofil, die Lage des Druckpunkts D wesentlich von der Größe des Anstellwinkels α ab; man spricht daher von einer *Druckpunktswanderung*, die eben durch (41,6) analytisch zum Ausdruck gebracht wird. Auf graphischem Wege pflegt man sich die Druckpunktswanderung eines beliebigen Profils dadurch zu veranschaulichen, daß man das Verhältnis der Länge der Strecke DT zur Länge der ganzen Profilhene ST in seiner Abhängigkeit von α aufzeichnet, wobei unter T der vordere Endpunkt der Profilhene zu verstehen ist (vgl. Fig. 6 auf S. 59). Für das Kreisbogenprofil wird nun unter Beachtung von (41,6)

$$\frac{DT}{ST} = \frac{2c - OD}{4c} = \frac{1}{2} - \frac{c \cdot \sin \alpha}{4 \sqrt{c^2 + s^2} \cdot \sin(\alpha + \beta)} + \frac{s}{4c} \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad (41,61)$$

und wenn man hierin die durch

$$\varepsilon = \frac{f}{l} = \frac{s}{2c} \quad (41,62)$$

definierte Wölbung des Kreisbogenprofils einführt, so ergibt sich

$$\frac{DT}{ST} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ 1 - \frac{\sin \alpha}{2 \cdot \sqrt{1 + 4\varepsilon^2 \cdot \sin(\alpha + \beta)}} + \varepsilon \cdot \operatorname{tg} \alpha \right\}. \quad (41,63)$$

Auf Grund dieser Relation ist Fig. 39 gezeichnet, die die Druckpunktswanderungen für vier Kreisbogenprofile mit den Wölbungen

$$\varepsilon_1 = 0,025, \quad \varepsilon_2 = 0,05, \quad \varepsilon_3 = 0,075, \quad \varepsilon_4 = 0,1$$

zur Darstellung bringt. Für $\varepsilon = 0$, d. h. $s = 0$ und $\beta = 0$, liefert (41,63) die Beziehung

$$\frac{DT}{ST} = \frac{1}{4}, \quad (41,64)$$

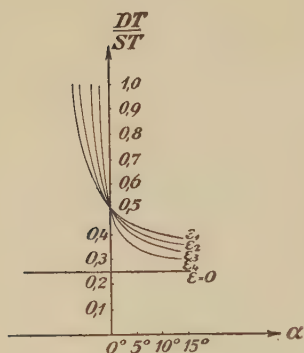


Fig. 39.

und wir erhalten in der Zeichnung eine Parallele zur horizontalen Achse, die der festen Druckpunktslage bei dem durch $s = 0$ charakterisierten Streckenprofil entspricht. Tatsächlich ist ja auch (41,64) mit (40,6) identisch, denn da für $s = 0$ gemäß (41,1) der Profilmittelpunkt M mit dem Nullpunkt O der Profilebene zusammenfällt, mithin $OD = MD$ gesetzt werden kann, so liefert (41,61) in Verbindung mit (41,64)

$$MD = 2c - 4c \cdot \frac{DT}{ST} = c,$$

in Übereinstimmung mit (40,6).

Will man die vorstehend abgeleiteten Formeln auf ein vorgelegtes Kreisbogenprofil mit gegebener Pfeilhöhe f und Sehnenslänge l anwenden, so hat man darin unter Benutzung von (41,22) und (41,23) statt s und c die Größen f und l einzuführen. So erhält man z. B., da (vgl. Fig. 37)

$$\sqrt{c^2 + s^2} = \frac{c}{\cos \beta} = \frac{l}{4 \cos \beta}$$

gesetzt werden kann, anstelle von (41,4) die Relation

$$A = \frac{\pi Q V^2 l}{\cos \beta} \cdot \sin(\alpha + \beta) \quad (41,7)$$

mit

$$\beta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2f}{l}, \quad (41,71)$$

von der wir in § 43 Gebrauch machen werden.

§ 42. Joukowskische Profile.

Während uns die in den beiden vorhergehenden Paragraphen behandelten Beispiele lediglich Grenzfälle von eigentlichen Profilen zu liefern vermochten, werden wir nunmehr im Anschluß an das Vorgehen von *Joukowski*¹⁾ zu solchen Profilen gelangen, die unmittelbar einer praktischen Realisierung fähig sind, und die insbesondere an ihrem hinteren Ende in eine Spitze auslaufen, hingegen vorne eine ausgeprägte Abrundung aufweisen.

Zur Definition dieser sogenannten *Joukowskischen Profile* dient nach wie vor die Abbildungsfunktion (40,1), doch wird jetzt als Grundkreis derjenige Kreis k der Z -Ebene gewählt, der durch die Stelle $\zeta = -c$ hindurchgeht, und dessen Mittelpunkt M durch

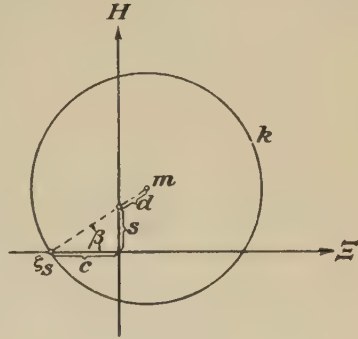


Fig. 40.

$$\zeta_M = m = i \cdot s + d \cdot e^{i\beta} \quad (42,1)$$

mit

$$\beta = \arctg \left(\frac{s}{c} \right) \quad (42,11)$$

gegeben ist (vgl. Fig. 40). Der Punkt $\zeta = +c$ gehört demnach dem von k berandeten Innengebiet an, und für den Radius a des Grundkreises erhalten wir die Relation

$$a = \sqrt{c^2 + s^2} + d. \quad (42,12)$$

Mit (42,1) und (42,12) liefert (32,4)

$$\zeta_S = i \cdot s + d \cdot e^{i\beta} - \sqrt{c^2 + s^2} \cdot e^{i\beta} - d \cdot e^{i\beta} = -c,$$

so daß die Profilecke S wieder an der durch $z_S = -2c$ gekennzeichneten Stelle der Z -Ebene liegen muß. Nun folgt aus (40,1)

$$z \cdot \zeta = \zeta^2 + c^2$$

oder

$$\zeta^2 - z \cdot \zeta + c^2 = 0,$$

was durch Auflösung nach ζ

$$\zeta = f(z) = \frac{z}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{z^2 - 4c^2} = \frac{z}{2} + (z + 2c)^{1/2} \cdot \frac{\sqrt{z - 2c}}{2}$$

¹⁾ Vgl. *N. Joukowski*, Zeitschr. f. Flugtechn. u. Motorluftschiffahrt Bd. 1, S. 281; 1910 und Bd. 3, S. 81; 1912.

ergibt. Hiermit erscheint aber die Abbildungsfunktion (40,1) in der Umgebung der Stelle $z_S = -2c$ in der Form (32,1) dargestellt, falls

$$\frac{\pi}{2\pi - \omega} = \frac{1}{2}, \quad \text{mithin} \quad \omega = 0$$

gesetzt wird. Demnach muß jedes Joukowskische Profil an seinem hinteren Ende in eine Spitze mit verschwindender Öffnung auslaufen.

Um den gemäß (36,3) und (40,11) durch

$$z_F = m + \frac{c^2}{a} \cdot e^{-i\beta} \quad (42,3)$$

oder wegen (42,1) und (42,12) auch durch

$$z_F = i \cdot s + d \cdot e^{i\beta} + \frac{c^2}{\sqrt{c^2 + s^2 + d}} \cdot e^{-i\beta} \quad (42,31)$$

gekennzeichneten Brennpunkt F bei vorgelegtem Grundkreis k zeichnerisch zu ermitteln, ziehen wir (vgl. Fig. 41) durch den Mittelpunkt M eine Parallele

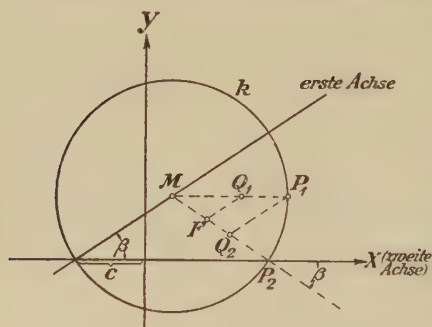


Fig. 41.

zur X -Achse, die den Grundkreis k rechts von M im Punkte P_1 schneiden möge. Tragen wir dann auf MP_1 die Strecke MQ_1 von der Länge c ab, verbinden ferner M mit dem Schnittpunkt P_2 von k und der positiven X -Achse, tragen auf MP_2 die Strecke $MQ_2 = MQ_1 = c$ ab und ziehen schließlich durch den Punkt Q_1 die Parallele zu P_1Q_2 , so ist der Schnittpunkt dieser Parallelen mit MP_2 der gesuchte Profilbrennpunkt F . Denn zunächst

ist MP_2 gegen die positive Richtung der X -Achse um den Winkel $-\beta$ geneigt, und überdies gilt

$$MP_1 : MQ_1 = MQ_2 : MF,$$

woraus in Übereinstimmung mit (42,3)

$$MF = |z_F - m| = \frac{c^2}{a}$$

folgt.

Um das zu einem vorgelegten Grundkreis k gehörige Joukowskische Profil auf graphischem Wege zu konstruieren, können wir nach E. Trefftz¹⁾ folgendermaßen verfahren. Wir deuten den durch (40,1) vermittelten Zusammenhang zwischen den beiden komplexen Variablen z und ζ als Transformation einer Punktmenge der Gaußschen Zahlenebene,

¹⁾ Vgl. E. Trefftz, Zeitschr. f. Flugtechn. u. Motorluftschiffahrt Bd. 4, S. 130; 1913.

so daß wir also z und ζ als Punkte einer und derselben Ebene anzusehen haben. Schreiben wir (40,1) in der Form

$$z = \frac{1}{2} \left(2\zeta + \frac{2c^2}{\zeta} \right), \quad (42,4)$$

so erscheint z als die halbe Summe der beiden komplexen Größen

$$z_1 = 2\zeta \quad (42,41)$$

und

$$z_2 = \frac{2c^2}{\zeta}. \quad (42,42)$$

Führen wir nun die durch (42, 41) dargestellte Transformation des Grundkreises k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius a aus, so erhalten wir (vgl. Fig. 42) einen Kreis k_1 mit dem Radius $2a$, dessen Mittelpunkt M_1 auf der Verbindungsgeraden der beiden Punkte $\zeta = -2c$ und $\zeta = i \cdot 2s$ im Abstände $2d$ von der Stelle $\zeta = i \cdot 2s$, und zwar außerhalb der von $\zeta = -2c$ zu $\zeta = i \cdot 2s$ führenden Strecke, gelegen ist. Da ferner die durch (42,42) dargestellte lineare Transformation eine Kreisverwandtschaft ist, so muß auch durch sie der Grundkreis k wieder in einen Kreis übergeführt werden, den wir mit k_2 bezeichnen wollen. Um diesen Kreis k_2 zu konstruieren, beachten wir zunächst, daß die auf dem Grundkreis k gelegene Stelle $\zeta = -c$ durch (42,42) in die Stelle $z_2 = -2c$ übergeführt wird. Diese Stelle ist aber ebenfalls auf k_1 gelegen, so daß sich in ihr die beiden Kreise k_1 und k_2 treffen müssen. Und zwar müssen sie einander dort be-

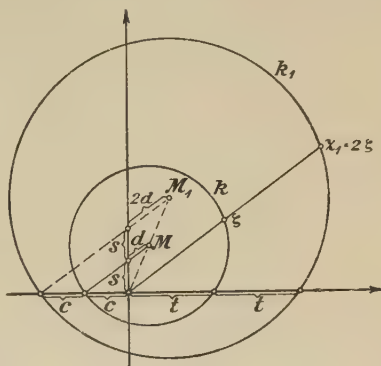


Fig. 42.

rühren, da sie keinen zweiten gemeinsamen Punkt aufweisen können. Denn die Relation $z_1 = z_2$ ist gemäß (42,41) und (42,42) nur für $\zeta = \pm c$ erfüllt, und von diesen beiden Werten entspricht lediglich die Zahl $\zeta = -c$ einem auf dem Grundkreis k gelegenen Punkt. Als erster geometrischer Ort für den Mittelpunkt M_2 des Kreises k_2 bietet sich demnach die den Mittelpunkt M_1 des Kreises k_1 tragende, durch die Punkte $\zeta = -2c$ und $\zeta = i \cdot 2s$ hindurchgelegte Gerade dar. Um einen zweiten geometrischen Ort für M_2 aufzufinden, genügt alsdann die Bestimmung eines von $\zeta = -2c$ verschiedenen auf k_2 gelegenen Punktes. Dies gelingt nun am einfachsten auf Grund der folgenden Überlegung. Ist $\zeta = t$ (t positiv-reell) der Schnittpunkt des Grundkreises k mit der positiven reellen Achse, so muß für seinen auf k_2 gelegenen Bildpunkt $z_2 = \tau$ gemäß (42,42) die Beziehung

$$t \cdot \tau = 2c^2 \quad \text{oder} \quad (2t) \cdot \tau = (2c)^2$$

bestehen, die den ebenfalls auf der positiven reellen Achse gelegenen Punkt

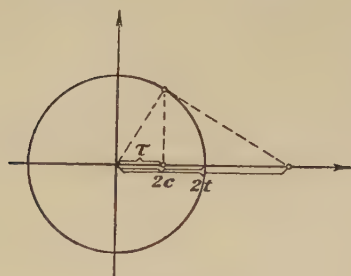


Fig. 43.

$z_2 = \tau$ sofort auf einfache Weise zu konstruieren gestattet (vgl. Fig. 43). Die auf dem von $\zeta = -2c$ bis zu $\zeta = \tau$ führenden Stück der reellen Achse errichtete Mittelsenkrechte gibt sodann einen zweiten geometrischen Ort für M_2 , womit der Kreis k_2 gefunden ist.

Setzen wir nun $\zeta = \varrho \cdot e^{i\theta}$, so wird gemäß (42,41)

$$z_1 = 2\varrho \cdot e^{i\theta}$$

sowie gemäß (42,42)

$$z_2 = \frac{2c^2}{\varrho} \cdot e^{-i\theta}.$$

Die einem und demselben ζ durch (42,41) und (42,42) zugeordneten Punkte haben demnach stets entgegengesetzt-gleiche Argumente, so daß sich also die beiden auf k_1 bzw. k_2 gelegenen Punkte z_1 bzw. z_2 , die gemäß (42,41) bzw. (42,42) einem und demselben auf dem Grundkreis k gelegenen

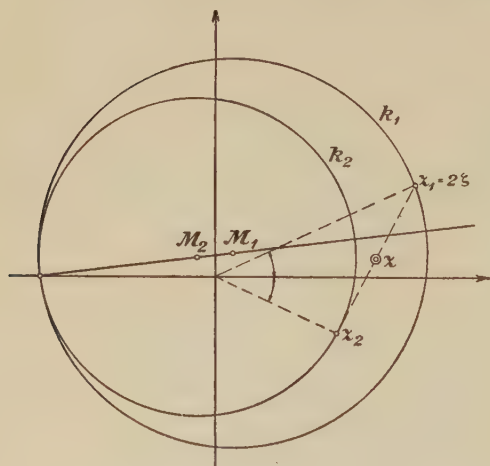


Fig. 44.

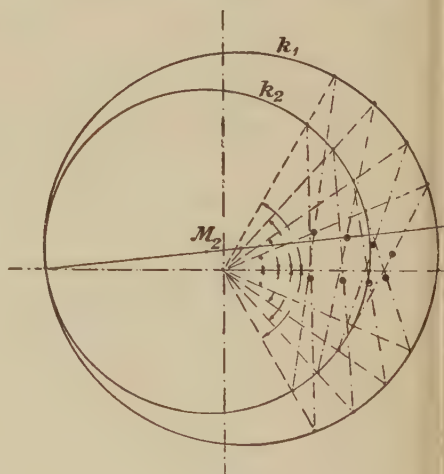


Fig. 45.

Punkt ζ entsprechen, äußerst einfach zeichnerisch ermitteln lassen (vgl. Fig. 44). Da ferner der Punkt $\frac{1}{2} \cdot (z_1 + z_2)$ mit dem Mittelpunkt der Verbindungsstrecke der beiden Punkte z_1 und z_2 zusammenfällt, so ist dieser Mittelpunkt gemäß (42,4) der dem Punkt ζ des Grundkreises k zugeordnete Punkt z der *Joukowskischen* Profilkontur C .

Die Durchführung der hiermit im einzelnen beschriebenen und theoretisch begründeten Konstruktion für eine Anzahl von Punkten ist in

Fig. 45 wiedergegeben. Das vollständige, in die Z -Ebene gelegte Profil ist in Fig. 46 dargestellt, die überdies den zugehörigen Grundkreis k der Z -Ebene zeigt.

Ein ähnliches Konstruktionsverfahren, bei dessen Beschreibung wir uns auf Grund der soeben gemachten Ausführungen ganz kurz fassen dürfen, hat *R. v. Mises*¹⁾ angegeben. Setzt man

$$z_3 = \zeta \quad (42,43)$$

sowie

$$z_4 = \frac{c^2}{\zeta}, \quad (42,44)$$

so wird gemäß (40,1)

$$z = z_3 + z_4. \quad (42,45)$$

Durch die Transformation (42,43) wird der Grundkreis k in sich übergeführt, während die Transformation (42,44) durch Anwendung auf k

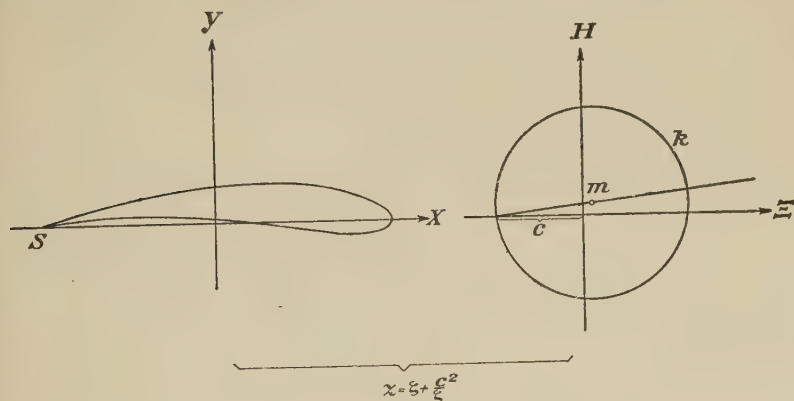


Fig. 46.

einen Kreis k^* liefert, der k an der Stelle $\zeta = -c$ berührt, so daß der Mittelpunkt M^* von k^* auf der Verbindungsgeraden der Punkte $\zeta = -c$ und $\zeta = m$ liegen muß. Da ferner der Stelle $\zeta = t$, d. h. also dem Schnittpunkt des Grundkreises k mit der positiven reellen Achse, bei der Transformation (42,44) die auf k^* gelegene Stelle $z_4 = \tau^*$ entspricht, für die

$$\tau^* = \frac{c^2}{t} \quad \text{oder} \quad t \cdot \tau^* = c^2$$

gilt, so läßt sich hierdurch leicht ein zweiter auf k^* gelegener Punkt bestimmen, womit die Konstruktion des Kreises k^* ermöglicht ist. Gemäß (42,43) und (42,44) haben die beiden Zahlen z_3 und z_4 , genau wie die zuvor

¹⁾ Vgl. die in der Fußnote auf S. 138 zitierte Arbeit.

benutzten Zahlen z_1 und z_2 , entgegengesetzt-gleiche Argumente, so daß sich im Hinblick auf (42,45) der einem Punkte ζ des Grundkreises k zugeordnete

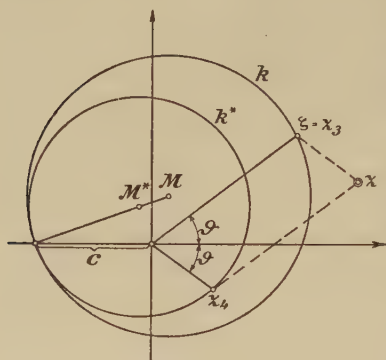


Fig. 47.

Punkt z der *Joukowski*ischen Profilkontur durch die aus Fig. 47 ersichtliche einfache Konstruktion auffinden läßt.

Eine anschauliche Vorstellung von der Formenmannigfaltigkeit, die man bei den *Joukowski*ischen Profilen durch Wahl verschiedener Werte der beiden

Parameter $\frac{s}{c}$ und $\frac{d}{c}$ erzielen kann, vermag Fig. 48 zu vermitteln. Sie gibt die Gesamtheit derjenigen *Joukowski*ischen Profile wieder, die in der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen ex-

perimentell untersucht worden sind¹⁾. Wie sich deutlich erkennen läßt, ist die Größe des Parameters $\frac{s}{c}$ für die Wölbung, hingegen die Größe des Parameters $\frac{d}{c}$ für die Dicke des betr. Profils maßgebend. Infolgedessen können

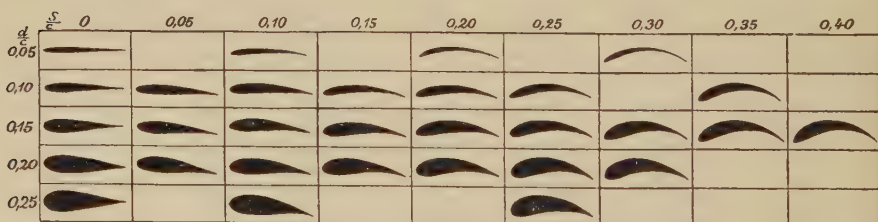


Fig. 48.

wir $\frac{s}{c}$ als den *Wölbungsparameter* und $\frac{d}{c}$ als den *Dickenparameter* des durch (42,1) und (42,11) charakterisierten *Joukowski*ischen Profils bezeichnen. Schließlich sei erwähnt, daß die Größe $4c$ etwas kleiner als die Profiltiefe sowie die Größe $4d$ etwas kleiner als die größte Profildicke ist.

Für den Auftrieb A eines *Joukowski*ischen Profils erhalten wir nunmehr mit (34,6) und (42,12)

$$A = 4\pi\rho V^2 \cdot (\sqrt{c^2 + s^2} + d) \cdot \sin(\alpha + \beta). \quad (42,5)$$

¹⁾ Vgl. L. Prandtl u. A. Betz, Ergebnisse d. Aerodyn. Versuchsanstalt zu Göttingen, III. Lieferung, S. 13 u. S. 59; 1927.

Das auf den Profilmittelpunkt M bezogene statische Moment M_M des Auftriebs berechnet sich aus (35,5) unter Beachtung von (40,11) zu

$$M_M = 2\pi c^2 \rho V^2 \cdot \sin(2\alpha), \quad (42,6)$$

und der zugehörige Hebelarm h_M ist gemäß (35,6) durch

$$h_M = \frac{c^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{(\sqrt{c^2 + s^2 + d}) \cdot \sin(\alpha + \beta)} \quad (42,61)$$

gegeben. Für die Profile mit verschwindender Druckpunktswanderung, d. h. also mit einer vom Anstellwinkel α unabhängigen Druckpunktslage, muß die Richtung der ersten Achse mit der Richtung der zweiten Achse zusammenfallen, mithin wegen (40,11) der Winkel β und damit wegen (42,11) auch die Größe s gleich Null sein. Demnach sind sämtliche *Joukowskischen* Profile mit fester Druckpunktslage durch die Bedingung gekennzeichnet, daß ihr Wölbungsparameter verschwinden muß. Es sind dies, wie die erste Vertikalreihe von Fig. 48 erkennen läßt, die völlig symmetrischen Profile, die praktisch als Querschnittsformen von Stielen oder Streben, d. h. von Verbindungsstäben zwischen der unteren und der oberen Tragfläche eines Doppeldeckers, Verwendung finden.

§ 43. Sichelflächenprofile¹⁾.

Wird in (40,1) auf beiden Seiten die Größe $2c$ subtrahiert bzw. addiert, so ergeben sich die Relationen

$$z - 2c = \frac{(\zeta - c)^2}{\zeta} \quad \text{und} \quad z + 2c = \frac{(\zeta + c)^2}{\zeta},$$

denen zufolge sich die Funktion (40,1) auch in der Form

$$\frac{z - 2c}{z + 2c} = \left(\frac{\zeta - c}{\zeta + c} \right)^2 \quad (43,1)$$

zum Ausdruck bringen läßt. Ist k jetzt wieder ein Kreis der Zahlenebene, der durch die beiden auf der reellen Achse symmetrisch zum Nullpunkt gelegenen Punkte $+c$ und $-c$ hindurchgeht, und dessen Mittelpunkt M durch die Zahl

$$m = i \cdot s \quad (s > 0) \quad (43,11)$$

gegeben ist, so wird k durch die reelle Achse in zwei Bogen zerschnitten, von denen wir denjenigen, der oberhalb der reellen Achse verläuft, mit $\widehat{k}_1$ bezeichnen wollen, während der andere, unterhalb der reellen Achse verbleibende Bogen $\widehat{k}_2$ heißen möge. Setzen wir

$$\arg(\zeta + c) = \vartheta^{(1)} \quad \text{und} \quad \arg(\zeta - c) = \vartheta^{(2)},$$

¹⁾ Zu den Ausführungen dieses Paragraphen vgl. *W. M. Kutta*, Sitzgsber. d. Bayr. Akad. d. Wiss., math. phys. Klasse, Jg. 1911, S. 65 sowie die in der Fußnote auf S. 138 zitierte Arbeit von *R. v. Mises*.

so wird für jeden beliebigen Punkt ζ der Zahlenebene

$$\arg \frac{\zeta - c}{\zeta + c} = \vartheta^{(2)} - \vartheta^{(1)}. \quad (43,12)$$

Liegt nun ζ oberhalb der reellen Achse, so gilt (vgl. Fig. 49)

$$0 < \vartheta^{(2)} - \vartheta^{(1)} < \pi, \quad (43,13)$$

und zwar mißt $\vartheta^{(2)} - \vartheta^{(1)}$ denjenigen Winkel, um den man die von der Stelle ζ zum Punkte $-c$ führende Halbgerade im positiven Sinn drehen muß, damit sie mit der von ζ zu $+c$ führenden Halbgeraden zusammenfällt. Letzteres bleibt auch dann bestehen, wenn ζ unterhalb der reellen Achse gelegen ist. Denn in diesem Falle erhalten wir zwar (vgl. Fig. 50) für $\vartheta^{(2)} - \vartheta^{(1)}$ zunächst einen negativen, der Bedingung

$$-\pi < \vartheta^{(2)} - \vartheta^{(1)} < 0$$

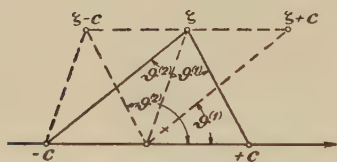


Fig. 49.

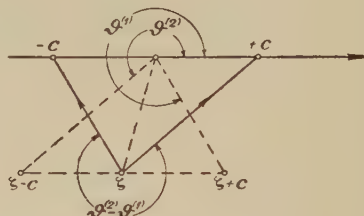


Fig. 50.

unterworfenen Wert, doch da das Argument einer komplexen Größe stets um ein beliebiges Vielfaches von 2π vermehrt werden kann, so dürfen wir die vorstehende Relation durch Addition von 2π in

$$\pi < \vartheta^{(2)} - \vartheta^{(1)} < 2\pi \quad (43,14)$$

umwandeln, womit das Fortbestehen der zuvor ausgesprochenen Regel auch für unterhalb der reellen Achse gelegene Werte von ζ dargetan ist. Durchläuft nun ζ den oben eingeführten Kreis k , so stellt $\vartheta^{(2)} - \vartheta^{(1)}$ stets einen Peripheriewinkel¹⁾ dieses Kreises dar, und er muß daher auf Grund eines bekannten elementar-geometrischen Satzes bei festem Bogen

¹⁾ Unter einem *Peripheriewinkel*, dessen Scheitelpunkt in ζ liegt, und dessen Schenkel durch die auf k gelegenen Punkte $+c$ und $-c$ hindurchgehen, verstehen wir hier stets denjenigen Winkel, um den man die von ζ zu $-c$ führende Halbgerade im positiven Sinn drehen muß, damit sie in die von ζ zu $+c$ führende Halbgerade übergeht. Wenn sich demnach ζ oberhalb der reellen Achse befindet, so liegt der Wert des Peripheriewinkels zwischen 0 und π , während der Wert des Peripheriewinkels für unterhalb der reellen Achse befindliche ζ zwischen π und 2π gelegen ist. Umgekehrt gehört zu einem Peripheriewinkel zwischen 0 und π ein oberhalb der reellen Achse gelegener Scheitelpunkt, dagegen zu einem Peripheriewinkel zwischen π und 2π ein unterhalb der reellen Achse gelegener Scheitelpunkt.

einen konstanten Wert besitzen. Demnach können wir, solange ζ auf dem Bogen $\widehat{k}_1$ liegt, gemäß (43,12)

$$\arg \frac{\zeta - c}{\zeta + c} = \vartheta_0 \quad (43,15)$$

setzen, falls ϑ_0 den über dem Bogen $\widehat{k}_2$ stehenden Peripheriewinkel des Kreises k bezeichnet (vgl. Fig. 51). Und zwar ist dieser Winkel ϑ_0 , da ja der Mittelpunkt M von k gemäß (43,11) oberhalb der reellen Achse liegt, der Einschränkung

$$0 \leq \vartheta_0 \leq \frac{\pi}{2} \quad (43,16)$$

unterworfen. Aus (43,1) und (43,15) folgt dann

$$\arg \left(\frac{z - 2c}{z + 2c} \right) = 2\vartheta_0, \quad (43,17)$$

und dies besagt wegen (43,16) nichts anderes, als daß bei der Transfor-

mation (43,1) dem Bogen $\widehat{k}_1$ des Kreises k ein von $+2c$ bis $-2c$ führender, oberhalb der reellen Achse gelegener Kreisbogen $\widehat{k}_0$ mit dem Peripheriewinkel $2\vartheta_0$ entspricht. Liegt dagegen ζ auf dem Bogen $\widehat{k}_2$ des Kreises k , so wird

$$\arg \left(\frac{\zeta - c}{\zeta + c} \right) = \vartheta_0 + \pi, \quad (43,18)$$

mithin gemäß (43,1)

$$\arg \left(\frac{z - 2c}{z + 2c} \right) = 2\vartheta_0 + 2\pi,$$

wofür wir wegen der Unbestimmtheit des Arguments einer komplexen Größe um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π auch

$$\arg \left(\frac{z - 2c}{z + 2c} \right) = 2\vartheta_0 \quad (43,19)$$

schreiben dürfen. Durch Vergleich von (43,17) und (43,19) ergibt sich dann, daß auch der Bogen $\widehat{k}_2$ von k durch die Transformation (43,1) in den eben genannten Kreisbogen $\widehat{k}_0$ übergeführt wird, mithin dem Vollkreis k dabei der doppelt zu durchlaufende Kreisbogen $\widehat{k}_0$ entspricht.

Die vorstehende Betrachtung hat uns sachlich nichts Neues gelehrt. Denn daß der hier benutzte Kreis k durch die Transformation (43,1) oder (40,1) in einen doppelt zu durchlaufenden Kreisbogen übergeführt

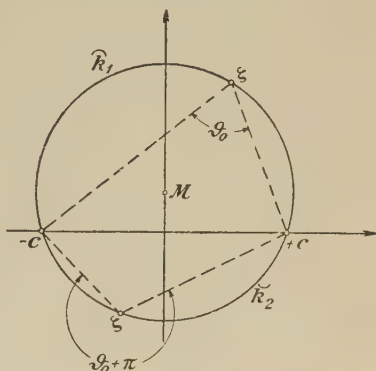


Fig. 51.

wird, wurde ja bereits in § 41 auf rein analytischem Wege bewiesen. Allein die jetzige Argumentation legt den Gedanken nahe, anstelle von (43,1) den allgemeinen Ansatz

$$\frac{z - \lambda c}{z + \lambda c} = \left(\frac{\zeta - c}{\zeta + c} \right)^\lambda \quad (43,2)$$

mit $\lambda > 0$ zu untersuchen, in dem (43,1) als ein durch $\lambda = 2$ gekennzeichneter Spezialfall enthalten ist. Aus (43,2) folgt

$$\arg \left(\frac{z - \lambda c}{z + \lambda c} \right) = \lambda \cdot \arg \left(\frac{\zeta - c}{\zeta + c} \right), \quad (43,21)$$

so daß jetzt dem oberen Bogen $\widehat{k}_1$ unseres Kreises k gemäß (43,15) der von $+\lambda c$ zu $-\lambda c$ führende Kreisbogen $\widehat{k}_0^{(1)}$ mit dem Peripheriewinkel

$$\Theta_0^{(1)} = \lambda \cdot \vartheta_0, \quad (43,22)$$

hingegen dem unteren Bogen $\widetilde{k}_2$ gemäß (43,18) der von $-\lambda c$ zu $+\lambda c$ zurückführende Kreisbogen $\widetilde{k}_0^{(2)}$ mit dem Peripheriewinkel

$$\Theta_0^{(2)} = \lambda \cdot \vartheta_0 + \lambda \cdot \pi \quad (43,23)$$

entsprechen muß. Da $\Theta_0^{(1)}$ und $\Theta_0^{(2)}$ nur für $\lambda = 2\nu$ ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) miteinander identisch werden, so besagt dies, daß der Kreis k durch die Transformation (43,2) im allgemeinen in ein *Kreisbogenzweieck* mit der *Sehnenlänge*

$$l = 2\lambda c \quad (43,24)$$

übergeführt wird, das nur unter der soeben genannten speziellen Bedingung in einen doppelt zu durchlaufenden Kreisbogen ausarten kann. Für die *Öffnung* ω dieses Kreisbogenzweiecks gilt (vgl. Fig. 52) unter Beachtung von (43,22) und (43,23)

$$\omega = (\pi - \Theta_0^{(2)}) - (\pi - \Theta_0^{(1)}) = \Theta_0^{(1)} - \Theta_0^{(2)} = -\lambda \cdot \pi, \quad (43,25)$$

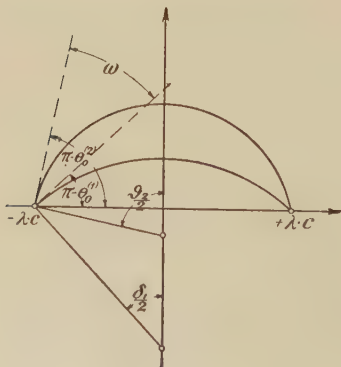


Fig. 52.

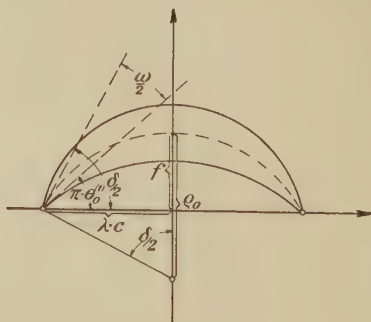


Fig. 53.

wofür wir, da wir im folgenden stets $\lambda < 2$ voraussetzen werden, auch

$$\omega = 2\pi - \lambda\pi \quad (43,3)$$

schreiben können.

Wie (43,3) erkennen läßt, ist ω von der Wahl von s , die gemäß (43,11) die Mittelpunktslage des Kreises k bestimmt, völlig unabhängig. Sämtliche Kreisbogenzweiecke, die allen durch die Punkte $+c$ und $-c$ hindurchgehenden Kreisen auf Grund der Transformation (43,2) mit festem λ entsprechen, besitzen demnach stets genau dieselbe Öffnung. Diese Kreisbogenzweiecke unterscheiden sich also lediglich durch ihre *mittlere Pfeilhöhe* f , worunter die Pfeilhöhe des *Mittelbogens* zu verstehen ist, d. h. desjenigen Kreisbogens, der die Öffnung des betreffenden Kreisbogenzweiecks halbiert (vgl. Fig. 53). Bezeichnen wir den Radius bzw. den Zentriwinkel des Mittelbogens mit ϱ_0 bzw. mit δ , so gilt

$$\varrho_0 = \frac{\lambda c}{\sin \frac{\delta}{2}} \quad (43,31)$$

und

$$f = \varrho_0 - \lambda \cdot c \cdot \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} = \lambda \cdot c \cdot \frac{1 - \cos \frac{\delta}{2}}{\sin \frac{\delta}{2}} = \lambda \cdot c \cdot \frac{\sin^2 \frac{\delta}{4}}{\sin \frac{\delta}{4} \cdot \cos \frac{\delta}{4}}$$

oder

$$f = \lambda c \cdot \operatorname{tg} \frac{\delta}{4}. \quad (43,32)$$

Ferner wird

$$\frac{\delta}{2} = (\pi - \Theta_0^{(1)}) + \frac{\omega}{2},$$

mithin wegen (43,25)

$$\delta = 2\pi - (\Theta_0^{(1)} + \Theta_0^{(2)}). \quad (43,33)$$

Führen wir hierin (43,22) und (43,23) ein, so bekommen wir

$$\delta = 2\pi - 2\lambda \cdot \left(\vartheta_0 + \frac{\pi}{2} \right),$$

wofür wir wegen (vgl. Fig. 54)

$$\operatorname{tg} \left(\vartheta_0 + \frac{\pi}{2} \right) = -\operatorname{ctg} \vartheta_0 = -\frac{s}{c}$$

unter Weglassung des unwesentlichen Summanden 2π auch

$$\delta = 2\lambda \cdot \operatorname{arctg} \frac{s}{c} \quad (43,34)$$

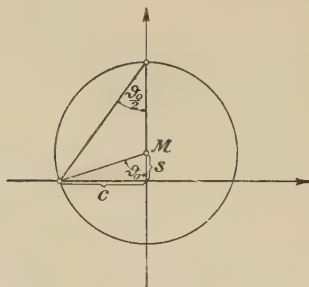


Fig. 54.

schreiben können. Hiermit bringt dann (43,32) die Abhängigkeit der mittleren Pfeilhöhe f des Kreisbogenzweiecks von der Lage des Mittelpunktes M des Ausgangskreises k formelmäßig zum Ausdruck. Werden schließlich die Zentriwinkel der beiden das Kreisbogenzweieck bildenden Bogen mit δ_1 und δ_2 bezeichnet, so gilt (vgl. Fig. 52)

$$\frac{\delta_1}{2} = \pi - \Theta_0^{(1)} \quad \text{und} \quad \frac{\delta_2}{2} = \pi - \Theta_0^{(2)}, \quad (43,35)$$

so daß gemäß (43,33)

$$\delta = \frac{1}{2} \cdot (\delta_1 + \delta_2) \quad (43,36)$$

wird.

Wenn wir jetzt den in (43,2) formulierten Zusammenhang zwischen z und ζ wieder als eine Abbildung der Z -Ebene auf die ζ -Ebene deuten (vgl. Fig. 55), so wird durch die vorstehenden Ausführungen der Ge-

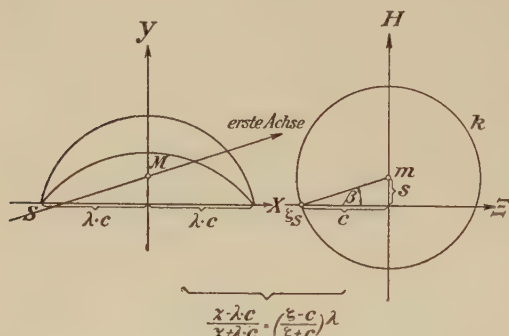


Fig. 55.

danke nahegelegt, das dabei aus dem Grundkreis k erhaltene Kreisbogenzweieck als die Kontur eines *Sichelflächenprofils* anzusehen, und für dieses Profil nunmehr die Auftriebseigenschaften zu ermitteln. Zu diesem Zweck muß zunächst die Funktion (43,2) für hinreichend große Werte des absoluten Betrages von z in eine Reihe von der Form (39,1) entwickelt werden, damit wir

den für unser Vorhaben benötigten Koeffizienten a_1 dieser Entwicklung bestimmen können. Nun läßt sich (43,2) in der Form

$$\zeta = c \cdot \frac{1 + z^*}{1 - z^*} \quad (43,4)$$

mit

$$z^* = \left(\frac{z - \lambda c}{z + \lambda c} \right)^{1/\lambda} = \left(1 - \frac{\lambda c}{z} \right)^{1/\lambda} \cdot \left(1 + \frac{\lambda c}{z} \right)^{-1/\lambda}$$

schreiben, und da auf Grund des binomischen Lehrsatzes

$$\left(1 - \frac{\lambda c}{z} \right)^{1/\lambda} = 1 - c \cdot \frac{1}{z} + \frac{c^2}{2} \cdot (1 - \lambda) \cdot \frac{1}{z^2} - \frac{c^3}{6} (1 - \lambda) \cdot (1 - 2\lambda) \cdot \frac{1}{z^3} + \dots,$$

$$\left(1 + \frac{\lambda c}{z} \right)^{-1/\lambda} = 1 - c \cdot \frac{1}{z} + \frac{c^2}{2} \cdot (1 + \lambda) \cdot \frac{1}{z^2} - \frac{c^3}{6} (1 + \lambda) \cdot (1 + 2\lambda) \cdot \frac{1}{z^3} + \dots$$

gesetzt werden darf, solange

$$\left| \frac{\lambda \cdot c}{z} \right| < 1, \quad \text{mithin} \quad |z| > \lambda \cdot c$$

gewählt wird, so wird

$$z^* = 1 - 2c \cdot \frac{1}{z} + 2c^2 \cdot \frac{1}{z^2} - \frac{2c^3}{3} \cdot (2 + \lambda^2) \cdot \frac{1}{z^3} + \dots,$$

womit (43,4)

$$\zeta = \frac{1 - c \cdot \frac{1}{z} + c^2 \cdot \frac{1}{z^2} - \frac{c^3}{3} \cdot (2 + \lambda^2) \cdot \frac{1}{z^3} + \dots}{\frac{1}{z} - c \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{c^2}{3} \cdot (2 + \lambda^2) \cdot \frac{1}{z^3} - \dots}$$

oder

$$\zeta = z + \frac{c^2}{3} \cdot (1 - \lambda^2) \cdot \frac{1}{z} + \dots \quad (43,41)$$

liefert. Demnach wird

$$a_1 = -\frac{c^2}{3} \cdot (\lambda^2 - 1), \quad (43,42)$$

so daß gemäß (35,31)

$$c_1^2 = \frac{c^2}{3} \cdot (\lambda^2 - 1) \quad (43,51)$$

und

$$\gamma = 0 \quad (43,52)$$

gilt, mithin die zweite Achse des Profils auch hier wieder mit der reellen Achse zusammenfällt. Ferner wird

$$\beta = \arctan \frac{s}{c}, \quad (43,53)$$

und für den Radius a des Grundkreises k erhalten wir

$$a = \sqrt{c^2 + s^2} = \frac{c}{\cos \beta}. \quad (43,54)$$

Infolgedessen ergibt sich gemäß (34,6)

$$A = 4 \pi \varrho V^2 \cdot \sqrt{c^2 + s^2} \cdot \sin(\alpha + \beta), \quad (43,61)$$

ferner gemäß (35,5)

$$M_M = \frac{2\pi}{3} c^2 \cdot (\lambda^2 - 1) \cdot \varrho V^2 \cdot \sin(2\alpha) \quad (43,62)$$

sowie gemäß (35,6)

$$h_M = \frac{c^2 \cdot (\lambda^2 - 1) \cdot \sin(2\alpha)}{6 \sqrt{c^2 + s^2} \cdot \sin(\alpha + \beta)}. \quad (43,63)$$

Da für den Druckpunkt D (vgl. Fig. 56) die Beziehung

$$OD \cdot \cos \alpha = h_M - s \cdot \sin \alpha$$

besteht, so gelangt die Druckpunktswanderung durch die Gleichung

$$OD = \frac{c^2 \cdot (\lambda^2 - 1) \cdot \sin \alpha}{3 \cdot \sqrt{c^2 + s^2} \cdot \sin(\alpha + \beta)} - s \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (43,64)$$

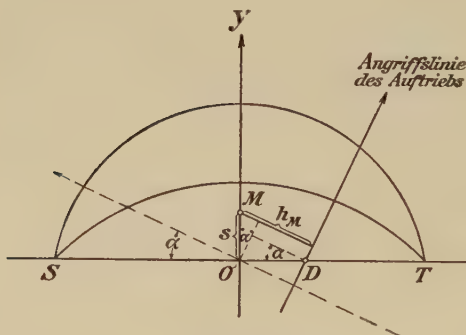


Fig. 56.

zum Ausdruck. Soll die Druckpunktlage vom Anstellwinkel α unabhängig sein, so muß die erste Achse des Profils mit der zweiten Achse, d. h. also mit der reellen Achse der Z -Ebene, zusammenfallen, was wegen (43,52) die Bedingung $\beta = 0$, mithin wegen (43,53) die Bedingung $s = 0$ gibt. Tatsächlich liefert alsdann (43,64) die Relation

$$OD = \frac{c}{3} \cdot (\lambda^2 - 1), \quad (43,65)$$

durch die die feste Druckpunktlage auf der Profilschne gekennzeichnet ist. Für $s = 0$ aber erhalten wir gemäß (43,34) und (43,32) stets Kreisbogenzweiecke mit verschwindender mittlerer Pfeilhöhe f , so daß also die Sichelflächenprofile mit einer vom Anstellwinkel α unabhängigen Druckpunktlage die zur reellen Achse symmetrischen Formen dieser Profile sind (vgl. Fig. 57).

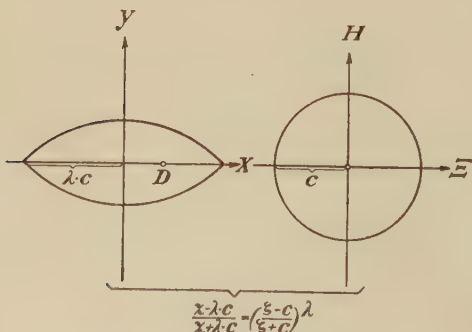


Fig. 57.

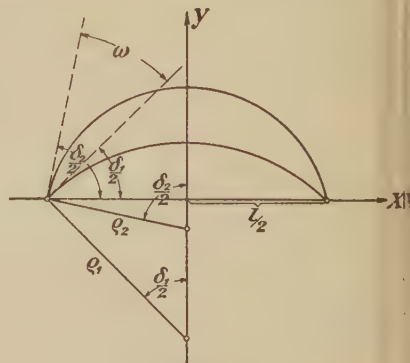


Fig. 58.

Sei jetzt umgekehrt in der Z-Ebene ein bestimmtes Sichelflächenprofil von der Sehnenlänge l vorgelegt, dessen Randbogen die Radien ϱ_1 und ϱ_2 besitzen mögen (vgl. Fig. 58). Um die Auftriebseigenschaften dieses Profils zu ermitteln, bestimmen wir zunächst die Zentriwinkel δ_1 und δ_2 der beiden Randbogen auf Grund der Relationen

$$\delta_1 = 2 \cdot \arcsin \frac{l}{2\varrho_1} \quad \text{und} \quad \delta_2 = 2 \cdot \arcsin \frac{l}{2\varrho_2}, \quad (43,71)$$

mit denen sich die Öffnung ω des Profils zu

$$\omega = \frac{1}{2} \cdot (\delta_2 - \delta_1) = \arcsin \frac{l}{2\varrho_2} - \arcsin \frac{l}{2\varrho_1} \quad (43,72)$$

berechnet. Infolgedessen ist der hier zu wählende Exponent λ der Kreisbogenzweiecksabbildung (43,2) gemäß (43,3) durch

$$\lambda = \frac{2\pi - \omega}{\pi} = \frac{4\pi - (\delta_2 - \delta_1)}{2\pi} \quad (43,73)$$

gegeben, während gemäß (43,24)

$$c = \frac{l}{2\lambda} = \frac{\pi l}{4\pi - (\delta_2 - \delta_1)} \quad (43,74)$$

zu setzen ist. Ferner liefert (43,36) in Verbindung mit (43,34) die Beziehung

$$\frac{\delta_1 + \delta_2}{4\lambda} = \arctg \frac{s}{c},$$

woraus gemäß (43,53)

$$\beta = \frac{1}{4\lambda} \cdot (\delta_1 + \delta_2) \quad (43,75)$$

folgt. Schließlich wird

$$a = \sqrt{c^2 + s^2} = \frac{c}{\cos \beta} = \frac{l}{2\lambda \cdot \cos \beta} = \frac{l}{2\lambda \cdot \cos \left\{ \frac{1}{4\lambda} \cdot (\delta_1 + \delta_2) \right\}}. \quad (43,76)$$

Somit erhalten wir für den Auftrieb A des in Rede stehenden Profils gemäß (43,61) den Ausdruck

$$A = \frac{2\pi\varrho V^2 l \cdot \sin \left\{ a + \frac{1}{4\lambda} \cdot (\delta_1 + \delta_2) \right\}}{\lambda \cdot \cos \left\{ \frac{1}{4\lambda} \cdot (\delta_1 + \delta_2) \right\}}, \quad (43,8)$$

und in entsprechender Weise läßt sich das statische Moment M_M sowie der Hebelarm h_M des Auftriebs A aus den Bestimmungsstücken des vorgelegten Sichelflächenprofils berechnen.

Es liegt nahe, den in (43,8) angeschriebenen Wert des Auftriebs des Sichelflächenprofils mit demjenigen Auftrieb zu vergleichen, den der zugehörige Mittelbogen, als Kreisbogenprofil aufgefaßt, liefern würde. Die Pfeilhöhe f dieses Mittelbogens ist gemäß (43,32), (43,74) und (43,36) durch

$$f = \lambda c \cdot tg \frac{\delta}{4} = \frac{l}{2} \cdot tg \frac{\delta_1 + \delta_2}{8}$$

gegeben, woraus

$$\text{arc tg } \frac{2f}{l} = \frac{\delta_1 + \delta_2}{8}$$

folgt. Vergleicht man diese Relation mit (41,71), so liefert (41,7) für den Auftrieb A_0 des Profilmittelbogens den Ansatz

$$A_0 = \frac{\pi \rho V^2 l \cdot \sin \left\{ \alpha + \frac{1}{8}(\delta_1 + \delta_2) \right\}}{\cos \frac{\delta_1 + \delta_2}{8}}. \quad (43,9)$$

Der Unterschied zwischen (43,8) und (43,9) beträgt nun im allgemeinen nur einige wenige Prozent, so daß sich der Auftrieb eines Sichelflächenprofils mit befriedigender Annäherung dem Auftrieb seines Mittelbogens gleichsetzen läßt.

§ 44. v. Kármán-Treffitzsche Profile.

Die im vorhergehenden Paragraphen untersuchten Sichelflächenprofile sind im Sinne unserer Theorie wieder als uneigentliche Profile anzusehen, da sie ja an beiden Enden eine scharfe Ecke aufweisen. Diesem Übelstand läßt sich aber, wie *Th. v. Kármán* und *E. Treffitz*¹⁾ erkannt haben, auf einfache Weise dadurch abhelfen, daß man als Grundkreis k denjenigen Kreis der Z -Ebene wählt, der durch die Stelle $\zeta = -c$ hindurchgeht, und dessen Mittelpunkt M durch

$$\zeta_m = m = i \cdot s + d \cdot e^{i\beta} \quad (44,1)$$

mit

$$\beta = \text{arc tg } \frac{s}{c} \quad (44,11)$$

gegeben ist. Dieses Verfahren ist genau dasselbe, das uns bei Zugrundelegung der Abbildungsfunktion (40,1) von den Kreisbogenprofilen zu den *Joukowski*schen Profilen geführt hat. Auch hier läßt sich nun wieder das aus dem genannten Grundkreis k durch Anwendung einer Transformation von der Form (43,2) hervorgehende Profil auf graphischem Wege kon-

¹⁾ Vgl. *Th. v. Kármán u. E. Treffitz*, Zeitschr. f. Flugtechn. u. Motorluftschiffahrt Bd. 9, S. 111; 1918.

struieren, doch ist diese Konstruktion jetzt wesentlich komplizierter als bei den *Joukowskischen* Profilen. Wir wollen daher hier auf die konstruktiven Einzelheiten nicht eingehen, sondern uns mit einem Hinweis auf Fig. 59 begnügen, in der ein *v. Kármán-Trefftzsches Profil* mit $\lambda = 1,95$ mit Hilfe einiger rechnerisch ermittelter Punkte skizziert worden ist. Das Aussehen eines derartigen Profils erinnert im allgemeinen an das der *Joukowskischen* Profilformen. Genau wie diese zeigt es vorne eine deutliche Abrundung; am hinteren Ende jedoch läuft es nicht mehr in eine Spitze, sondern in eine Ecke mit einer von Null verschiedenen Öffnung ω aus, für die sich z. B. mit $\lambda = 1,95$ gemäß (43,3)

$$\omega = 2\pi - 1,95\pi = 0,05\pi = 9^\circ$$

berechnet.

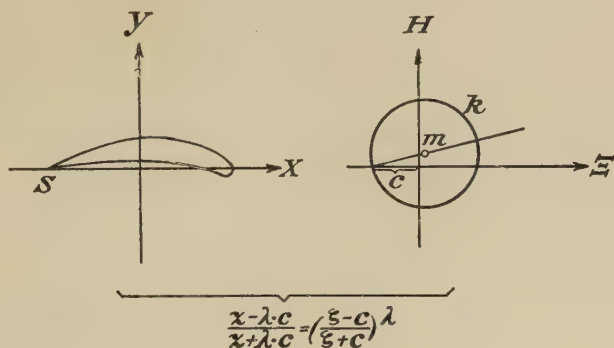


Fig. 59.

Von den Parametern, die die Auftriebseigenschaften eines *v. Kármán-Trefftz* Profils bestimmen, ist der Winkel γ durch (43,52), der Winkel β durch (44,11) sowie die Größe c_1^2 durch (43,51) gegeben. Für den Radius a des Grundkreises k erhalten wir den Ausdruck

$$a = \sqrt{c^2 + s^2 + d}, \quad (44,12)$$

so daß gemäß (34,6)

$$A = 4\pi \rho V^2 \cdot (\sqrt{c^2 + s^2 + d}) \cdot \sin(\alpha + \beta), \quad (44,2)$$

ferner gemäß (35,5)

$$M_M = \frac{2\pi}{3} c^2 \cdot (\lambda^2 - 1) \rho V^2 \cdot \sin(2\alpha) \quad (44,3)$$

sowie schließlich gemäß (35,6)

$$h_M = \frac{c^2 \cdot (\lambda^2 - 1) \cdot \sin(2\alpha)}{6 \cdot (\sqrt{c^2 + s^2 + d}) \cdot \sin(\alpha + \beta)} \quad (44,31)$$

wird.

§ 45. Das v. Misessche Profilerzeugungsverfahren.

Die große Mannigfaltigkeit derjenigen Profile, zu denen man durch die zuvor besprochenen Verfahren geführt wird, muß im Hinblick auf die Vielheit der praktisch zur Anwendung gelangenden Profilformen immerhin noch als sehr beschränkt bezeichnet werden. Dem entspricht nun durchaus die Tatsache, daß unsere bisherigen Untersuchungen samt und sonders unter Zugrundelegung einer ganz speziellen Klasse von Abbildungsfunktionen angestellt wurden, und hierin ist offenbar eine Einseitigkeit zu erblicken, bei der zu beharren kein Anlaß gegeben ist. Vielmehr liegt es ja außerordentlich nahe, nunmehr anstelle der Funktion (40,1), die sich als ein besonders einfaches Beispiel einer Funktion von der Form (39,2) als naturgemäßer Ausgangspunkt darbieten mußte, den allgemeineren Ansatz

$$z = z(\zeta) = \zeta + \frac{b_1}{\zeta} + \frac{b_2}{\zeta^2} + \dots + \frac{b_n}{\zeta^n} \quad (45,1)$$

zu wählen und zuzusehen, inwiefern sich mit seiner Hilfe aus geeigneten Grundkreisen k der Z -Ebene praktisch brauchbare Profilkonturen C der Z -Ebene erzeugen lassen.

Hier taucht jedoch sofort eine Schwierigkeit prinzipieller Natur auf. Soll nämlich (45,1) für unsere Zwecke verwertbar sein, so muß diese Funktion, wie wir wissen, in erster Linie eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Außengebiets κ' von k auf das Außengebiet B' von C vermitteln. Demnach müssen die zum Aufbau von (45,1) zu benutzenden Koeffizienten b_v so gewählt werden, daß die genannte Abbildungseigenschaft erzielt wird, und in dieser Forderung liegt eben die erwähnte Schwierigkeit. Denn die Frage nach den notwendigen und hinreichenden Bedingungen, denen die Koeffizienten einer für $|\zeta| > \varrho_0$ absolut und gleichmäßig konvergierenden Potenzreihe von der Form (39,2) genügen müssen, damit diese Potenzreihe eine umkehrbar eindeutige Abbildung des durch $|\zeta| > \varrho_0$ gegebenen Gebiets besorgt, stellt ein bis heute noch unerledigtes Hauptproblem der Theorie der konformen Abbildung dar. Wir wissen zwar, daß die Ableitung der Potenzreihe für kein der Bedingung $|\zeta| > \varrho_0$ genügendes ζ verschwinden darf, da sonst die zu ihr inverse Funktion im Innern des abzubildenden Gebiets Windungspunkte aufweisen, d. h. also in diesem Gebiet mehrdeutig sein würde; doch dies ist eine nur notwendige, keineswegs zugleich auch hinreichende Bedingung.

Nun muß aber von der Abbildungsfunktion (45,1) des weiteren verlangt werden, daß sie als Bild des Grundkreises k eine doppelpunktfreie geschlossene Kurve C liefert, die den allgemeinen gestaltlichen Anforderungen entspricht, denen die Konturen wirklich anwendbarer Profile unterworfen sind. Will man sich von dem Erfülltsein dieser Bedingung überzeugen, so bleibt wohl oder übel nichts anderes übrig, als sich die betr. Kurve tatsächlich aufzuzeichnen. Erweist sie sich dabei als un-

brauchbar, so wird man die benutzte Funktion verwerfen und eine neue durchprobieren müssen. Infolgedessen kommen für unsere Zwecke von vornherein lediglich solche Funktionen von der Form (45,1) in Betracht, von denen wir bereits wissen, daß sie den Grundkreis k in eine doppelpunktfreie geschlossene Kurve überführen, und für diese Funktionen ist dann, wie v. Mises¹⁾ erkannt hat, die Entscheidung über die umkehrbar eindeutige Natur der Abbildung auf Grund des auf S. 98 formulierten und bewiesenen Satzes äußerst einfach zu fällen.

Um das v. Misessche Profilerzeugungsverfahren zu erläutern, wollen wir das Achsenkreuz der Z -Ebene derart wählen, daß diejenige Stelle ζ_S , deren Bildpunkt die Profilschärfe S in der Z -Ebene liefern soll, genau wie bei sämtlichen zuvor behandelten Beispielen durch $\zeta_S = -c$ gegeben ist. Dann muß also der Grundkreis k durch diese Stelle $\zeta = -c$ hindurchgehen, und die Ableitung der Abbildungsfunktion (45,1), d. h. also die Funktion

$$z'(\zeta) = 1 - \frac{b_1}{\zeta^2} - \frac{2b_2}{\zeta^3} - \dots - \frac{n \cdot b_n}{\zeta^{n+1}}, \quad (45,2)$$

muß für $\zeta = -c$ verschwinden, damit eben die Bildkurve C des Grundkreises k in S eine Spitze erhält. Bezeichnen wir die übrigen n Nullstellen von (45,2) mit ζ_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$), so muß sich also (45,2) in der Form

$$z'(\zeta) = \left(1 + \frac{c}{\zeta}\right) \cdot \left(1 - \frac{\zeta_1}{\zeta}\right) \cdot \left(1 - \frac{\zeta_2}{\zeta}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{\zeta_n}{\zeta}\right) \quad (45,21)$$

schreiben lassen, und zwar muß dabei, damit beim Ausmultiplizieren gemäß (45,2) der Koeffizient von $\frac{1}{\zeta}$ verschwindet, die Relation

$$c - \zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_3 - \dots - \zeta_n = 0$$

oder

$$\sum_{\nu=1}^n \zeta_\nu = c \quad (45,22)$$

erfüllt sein. Wählen wir dann n der Bedingung (45,22) genügende komplexe Zahlen ζ_ν aus, die sämtlich ebenso wie der Nullpunkt $\zeta = 0$ im Inneren der von dem Grundkreis k berandeten Kreisfläche κ der Z -Ebene gelegen sind, setzen diese Werte ζ_ν in (45,21) ein, lösen die Klammern auf und ordnen nach steigenden

Potenzen von $\frac{1}{\zeta}$, so ergeben sich durch Vergleich mit (45,2) die gesuchten Koeffizienten b_ν der Abbildungsfunktion (45,1) in Abhängigkeit von den vorgelegten Größen c und ζ_ν . Insbesondere wird z. B.

$$b_1 = c^2 - \sum \zeta_\sigma \cdot \zeta_\tau, \quad (45,23)$$

¹⁾ Vgl. die in der Fußnote auf S. 138 zitierte Arbeit.

wobei die Summe über sämtliche aus je zweien der ζ_v zu bildenden Produkte $\zeta_\sigma \cdot \zeta_\tau$ zu erstrecken ist.

Nachdem auf diese Weise der Grundkreis k der Z -Ebene sowie die Abbildungsfunktion (45,1) festgelegt sind, kann die durch sie definierte Profilkontur C der Z -Ebene punktweise ermittelt werden. Die einzelnen Summanden von (45,1) lassen sich dabei teils durch Rechnung, teils durch Zeichnung bestimmen und alsdann zu der resultierenden Zahl z zusammenfügen. Die praktische Hauptschwierigkeit bleibt eben die, solche Annahmen hinsichtlich der Nullstellen ζ_v ausfindig zu machen, daß die aus ihnen konstruierte Abbildungsfunktion (45,1) zu brauchbaren Profilen führt. Hier kann nur reichliche Erfahrung, durch wirkliche Durchführung zahlreicher Beispiele erworben, einen gewissen Schutz gegen allzu grobe Mißgriffe gewähren. Einen Anhaltspunkt kann dabei die Bemerkung bieten, daß man den *Joukowskischen* Formen ähnliche Profile findet, falls man z. B. die Zahl ζ_1 in der Nähe der Stelle $\zeta = +c$, hingegen die übrigen ζ_v in der Nähe des Nullpunkts $\zeta = 0$ wählt.

Die Auftriebsparameter der derart entworfenen Profile sind nunmehr leicht zu ermitteln. Der Radius a und der Mittelpunkt $\zeta_M = m$ des Grundkreises k sind ja ohne weiteres gegeben. Zur Kenntnis der Größe c_1 sowie des Winkels γ führt gemäß (35,31) und (45,23) nach Vergleich von (45,1) mit (39,2) der Ansatz

$$c_1^2 \cdot e^{2i\gamma} = c^2 - \sum \zeta_\sigma \cdot \zeta_\tau, \quad (45,31)$$

und da $\zeta_S = -c$ gewählt wurde, so ist der Winkel β gemäß (32,4) der Relation

$$a \cdot e^{i\beta} = m + c \quad (45,32)$$

zu entnehmen.

Sämtliche durch den Ansatz (45,21) definierten Profile laufen, genau wie die *Joukowskischen* Profile, an ihrem hinteren Ende in eine Spitze mit verschwindender Öffnung aus. Will man Profile mit Ecken von der endlichen Öffnung ω erhalten, so hat man, wie hier nur kurz erwähnt werde, statt von (45,21) von der Beziehung

$$z'(\zeta) = \left(1 + \frac{c}{\zeta}\right)^{\lambda-1} \cdot \left(1 - \frac{\zeta_1}{\zeta}\right) \cdot \left(1 - \frac{\zeta_2}{\zeta}\right) \cdots \cdots \left(1 - \frac{\zeta_n}{\zeta}\right) \quad (45,4)$$

mit

$$\lambda = \frac{2\pi - \omega}{\pi} \quad (45,41)$$

auszugehen.

Zur Veranschaulichung der vorstehenden Ausführungen durch ein praktisches Beispiel wollen wir eine Abbildungsfunktion von der Form

$$z = z(\zeta) = \zeta + \frac{b_1}{\zeta} + \frac{b_2}{\zeta^2} + \frac{b_3}{\zeta^3} \quad (45,5)$$

benutzen sowie

$$c = 0,4, \quad a = 0,44, \quad \beta = 10^0 \quad (45,51)$$

und

$$\zeta_1 = c, \quad \zeta_2 = \frac{c}{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad \zeta_3 = -\frac{c}{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \quad (45,52)$$

setzen (vgl. Fig. 60). Alsdann wird gemäß (45,21)

$$\begin{aligned} z'(\zeta) &= \left(1 + \frac{c}{\zeta}\right) \cdot \left(1 - \frac{c}{\zeta}\right) \cdot \left(1 - \frac{c \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\zeta}\right) \cdot \left(1 + \frac{c \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\zeta}\right) \\ &= \left(1 - \frac{c^2}{\zeta^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{c^2 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}}{4\zeta^2}\right) = \left(1 - \frac{c^2}{\zeta^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{i \cdot c^2}{4\zeta^2}\right) \end{aligned}$$

oder

$$z'(\zeta) = 1 - \frac{c^2 \cdot \left(1 + \frac{i}{4}\right)}{\zeta^2} + \frac{i}{4} \cdot \frac{c^4}{\zeta^4},$$

und da gemäß (45,5)

$$z'(\zeta) = 1 - \frac{b_1}{\zeta^2} - \frac{2b_2}{\zeta^3} - \frac{3b_3}{\zeta^4}$$

gilt, so ergibt sich

$$b_1 = c^2 \cdot \left(1 + \frac{i}{4}\right), \quad b_2 = 0, \quad b_3 = -\frac{i \cdot c^4}{12}, \quad (45,53)$$

so daß (45,5) die Form

$$z = \zeta + \frac{c^2 \cdot \left(1 + \frac{i}{4}\right)}{\zeta} - \frac{i c^4}{12 \zeta^3} \quad (45,6)$$

annimmt.

Um die beiden Parameter c_1 und γ zu erhalten, muß gemäß (45,31) und (45,52)

$$c_1^2 \cdot e^{2i\gamma} = c^2 - \frac{c^2}{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} + \frac{c^2}{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} + \frac{c^2}{4} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

oder

$$c_1^2 \cdot e^{2i\gamma} = c^2 \cdot \left(1 + \frac{i}{4}\right) \quad (45,7)$$

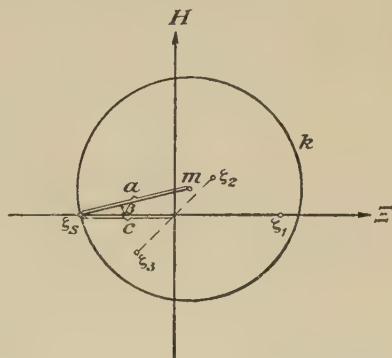


Fig. 60.

gesetzt werden, so daß

$$\frac{c_1^2}{c} = \left| c + \frac{ic}{4} \right| \quad (45,71)$$

und

$$2\gamma = \arg \left(c + \frac{ic}{4} \right) \quad (45,72)$$

wird. Bezeichnen wir nun (vgl. Fig. 61) die Stelle $z = -c$ mit P_1 und

die Stelle $z = -c - \frac{ic}{4}$ mit

Q_1 , so muß also

$$\frac{c_1^2}{c} = OQ_1 \quad (45,73)$$

sowie

$$2\gamma = \angle P_1 O Q_1 \quad (45,74)$$

sein. Aus (45,73) folgt die Proportion

$$c : c_1 = c_1 : OQ_1,$$

so daß sich die Größe c_1 durch eine einfache geometrische Konstruktion bestimmen läßt. Durch die Winkel β und γ sind in der aus Fig. 61 ersichtlichen Weise die Richtungen der ersten und der zweiten Achse festgelegt.

Zwecks Zeichnung der durch die Abbildungsfunktion (45,6) in Verbindung mit dem gewählten Grundkreis k definierten Profilkontur C schreiben wir (45,6) in der Form

$$z = z_1 + z_2 + z_3 \quad (45,8)$$

mit

$$z_1 = \zeta, \quad z_2 = \frac{c^2 \cdot \left(1 + \frac{i}{4}\right)}{\zeta}, \quad z_3 = -\frac{ic^4}{\zeta^3}. \quad (45,81)$$

Durch die erste der drei Transformationen (45,81) wird der Grundkreis k in sich übergeführt, während die zweite dieser Transformationen als Kreisverwandtschaft den Kreis k wieder in einen Kreis k_1 verwandelt. Und zwar entspricht dabei jedem Punkt P des Kreises k ein solcher Punkt Q des Kreises k_1 , der in Bezug auf die zweite Achse symmetrisch zu P gelegen ist. Ist nämlich (vgl. Fig. 62)

$$\arg \zeta = \vartheta,$$

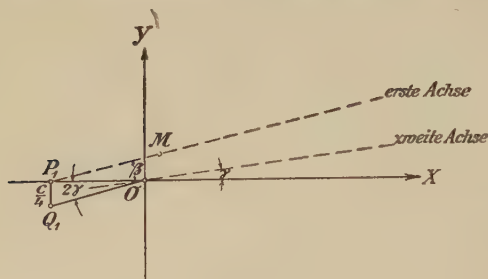


Fig. 61.

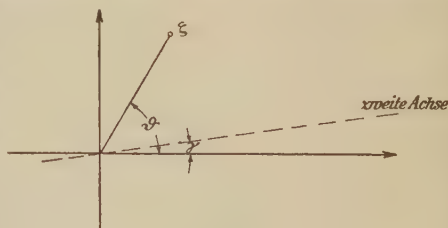


Fig. 62.

so schließt die von O nach ζ führende Halbgerade mit der zweiten Achse den Winkel

$$\vartheta^* = \vartheta - \gamma \quad (45,82)$$

ein. Gemäß (45,81) aber gilt unter Beachtung von (45,7)

$$\arg z_2 = \arg \left\{ c^2 \cdot \left(1 + \frac{i}{4} \right) \right\} - \arg \zeta = 2\gamma - \vartheta,$$

so daß der Winkel, den die von O nach z_2 führende Halbgerade mit der zweiten Achse einschließt, durch

$$\vartheta^{**} = (2\gamma - \vartheta) - \gamma = \gamma - \vartheta \quad (45,83)$$

gegeben ist. Aus (45,82) und (45,83) folgt $\vartheta^{**} = -\vartheta^*$, was zu beweisen war. Auf Grund dieser Eigenschaft läßt sich der Kreis k_1 sofort konstruieren, sowie jedem beliebigen auf k gelegenen ζ das entsprechende, auf k_1 gelegene z_2 zuordnen. Durch Addition von $\zeta = z_1$ und z_2 erhält man (vgl. Fig. 63) den Punkt $z_1 + z_2$, zu dem jetzt noch z_3 hinzuzufügen ist. Nun gilt gemäß (45,81)

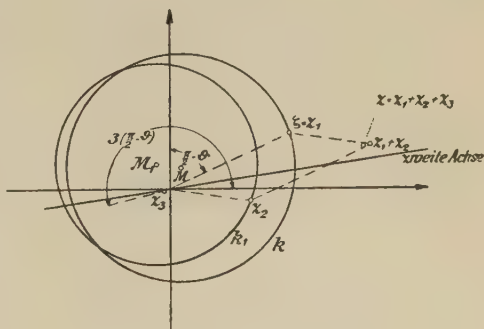


Fig. 63.

$$z_3 = \frac{ic^4}{12 \cdot |\zeta|^3 \cdot e^{i \cdot 3\vartheta}} = \frac{c^4}{12 \cdot |\zeta|^3} \cdot e^{3i \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right)},$$

mithin

$$|z_3| = \frac{c^4}{12 \cdot |\zeta|^3} \quad \text{und} \quad \arg z_3 = 3 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right),$$

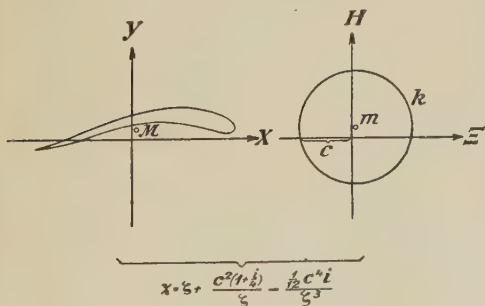


Fig. 64.

so daß sich $\arg z_3$ leicht zeichnerisch bestimmen läßt (vgl. Fig. 63), während man $|z_3|$ wegen der Kleinheit der hier in Betracht kommenden Größen lieber rechnerisch ermitteln wird. Addition von z_3 und $z_1 + z_2$ liefert dann schließlich gemäß (45,8) den dem Punkt ζ des Grundkreises k zugeordneten Punkt z der Profilkontur C , und wenn man die gesamte

vorstehend beschriebene Konstruktion für eine ausreichende Anzahl von

Punkten durchführt, so erhält man das in Fig. 64 neben seinem Grundkreis vollständig dargestellte Profil.

Sehr eingehende Untersuchungen über das *v. Misessche* Profilerzeugungsverfahren sind von *W. Müller*¹⁾ angestellt worden. Wir müssen



Fig. 65.



Fig. 66.

uns hier damit begnügen, von der auf diese Weise erreichbaren Formenfülle durch Hinweis auf die beigelegten Figuren eine Vorstellung zu geben, in denen eine Reihe von Beispielen aus den durch $n = 2$ (Fig. 65) bzw. $n = 3$ (Fig. 66) gekennzeichneten, von *Müller* besonders eingehend durchforschten Formengruppen zur Darstellung gebracht ist.

¹⁾ Vgl. *W. Müller*, Zs. f. ang. Math. u. Mech. Bd. 4, S. 213; 1924; ferner ebenda, S. 389.

§ 46. Ermittlung der Auftriebseigenschaften vorgegebener Profile.

Um die Auftriebseigenschaften eines beliebigen, graphisch vorgelegten Profils zu ermitteln, muß das Außengebiet der in die Z -Ebene eingezeichnet gedachten Profilkontur C umkehrbar eindeutig und konform auf das Außengebiet eines Kreises k der Z -Ebene derart abgebildet werden, daß die diese Abbildung vermittelnde Funktion

$$\zeta = f(z) \quad (46,1)$$

den beiden Bedingungen

$$f(\infty) = \infty \quad \text{und} \quad f'(\infty) = 1 \quad (46,11)$$

genügt. Die strenge Lösung eines derartigen Problems bereitet im allgemeinen sehr erhebliche Schwierigkeiten. Zwar ist die Existenz der Abbildungsfunktion (46,1), wie wir in § 24 bewiesen haben, als von vorneherein feststehend anzusehen; auch wissen wir, daß sie durch die beiden Nebenbedingungen (46,11) eindeutig bestimmt wird; allein mit solchen Existenz-Erkenntnissen allgemeiner Natur ist selbstverständlich noch nicht das mindeste für die praktische Durchführung spezieller Abbildungsaufgaben erreicht.

Nun haben uns die in § 44 angestellten Untersuchungen zu der bemerkenswerten Einsicht geführt, daß eine immerhin nicht unerhebliche Anzahl der in der Flugtechnik benutzten Tragflächenprofile solche Konturen besitzt, die nicht sehr wesentlich von denjenigen geschlossenen Kurven der Z -Ebene abweichen, die sich durch Anwendung einer Transformation von der Form

$$\frac{z - \lambda \cdot c}{z + \lambda \cdot c} = \left(\frac{\zeta - c}{\zeta + c} \right)^2 \quad (46,2)$$

mit den beiden reellen Parametern c und λ aus geeignet gewählten Grundkreisen der Z -Ebene erzeugen lassen. Diese durch (46,2) in Verbindung mit ihren Grundkreisen definierten *v. Kármán-Trefftz*-Profilkonturen laufen an ihrem hinteren Ende in eine scharf ausgeprägte Ecke aus, wobei der Eckpunkt S auf der negativen reellen Achse der Z -Ebene im Abstand $\lambda \cdot c$ vom Nullpunkt $z = 0$ liegt, und die Öffnung ω der Profilecke gemäß (43,3) durch

$$\omega = 2\pi - \lambda \cdot \pi \quad (46,21)$$

gegeben ist. Die Stelle $z = + \lambda \cdot c$ befindet sich bei einigermaßen schlanken Profilformen stets in großer Nähe des vorderen, abgerundeten Endes der Kontur, und zwar dort, wo die Krümmung der Kontur am größten ist. Denken wir uns jetzt umgekehrt ein *v. Kármán-Trefftz*-Profil mit der Öffnung ω in der Z -Ebene vorgelegt, so muß sich dieses selbstverständlich durch die zu (46,2) inverse Funktion auf den zugehörigen Grundkreis der Z -Ebene zurücktransformieren lassen. Wählen wir dabei aus Gründen, die sogleich verständlich erscheinen werden, statt der

Z -Ebene zunächst eine Z^* -Ebene, so hätten wir also eine Funktion von der Form

$$\frac{\xi^* - c}{\xi^* + c} = \left(\frac{z - \lambda c}{z + \lambda c} \right)^{1/\lambda} \quad (46,22)$$

anzusetzen und die in Betracht kommenden Werte der beiden Parameter λ und c zu ermitteln. Die Größe λ läßt sich sofort aus der bekannten Profilöffnung ω berechnen, da ja gemäß (46,21)

$$\lambda = \frac{2\pi - \omega}{\pi} \quad (46,23)$$

gilt. Zur Bestimmung von c wissen wir fürs erste, daß die Profilecke S mit der auf der reellen Achse gelegenen Stelle $z = -\lambda \cdot c$ identisch sein muß. Demnach wäre überdies noch die Stelle $z = +\lambda \cdot c$ aufzufinden, denn dann haben wir in der Verbindungsgeraden von $z = -\lambda \cdot c$ und $z = +\lambda \cdot c$ die reelle Achse der Z -Ebene vor uns, und mit dem Abstand d der beiden genannten Punkte berechnet sich $c = \frac{d}{2\lambda}$. Für die Lage von

$z = +\lambda \cdot c$ in Bezug auf das Vorderende der Profilkontur können die zuvor gemachten Angaben wenigstens gewisse Anhaltspunkte gewähren. Gelingt uns nun durch Zufall die genaue Ermittlung dieser Stelle, d. h. also die genaue Ermittlung der Größe c , so muß die zeichnerische Ausführung der Transformation (46,22) als Bild der Profilkontur der Z -Ebene den genauen Grundkreis in der Z^* -Ebene liefern. Ist aber $z = +\lambda \cdot c$ nur angenähert bestimmt, so werden wir in der Z^* -Ebene anstelle eines Kreises eine lediglich kreisähnliche Kurve erhalten, und dies wird offenbar auch dann der Fall sein müssen, wenn die vorgelegte Profilkontur der Z -Ebene überhaupt keine regelrechte *v. Kármán-Trefftzsche* Kontur darstellt, sondern sich einer solchen nur mit hinreichender Genauigkeit annähert. Daß letzteres in praktisch wichtigen Fällen sehr häufig zutrifft, wurde oben bereits ausdrücklich hervorgehoben. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich somit, daß sich die zu lösende Abbildungsaufgabe im wesentlichen auf das Problem reduziert, das Außengebiet einer kreisähnlichen geschlossenen Kurve der Z^* -Ebene derart auf das Außengebiet eines Kreises der Z -Ebene abzubilden, daß dabei der unendlich ferne Punkt fest bleibt, und die Ableitung der die Abbildung vermittelnden analytischen Funktion im Unendlichen den Wert 1 besitzt.

Nachdem uns die vorstehenden Erörterungen einen Weg zur Erledigung des eingangs formulierten Problems gewiesen haben, wollen wir jetzt die praktische Durchführung kurz skizzieren, ohne uns dabei auf die zeichnerischen Einzelheiten einzulassen. Für eine vorgelegte Profilkontur, die wir fortan der Deutlichkeit halber als eine in der Z -Ebene liegende Kurve mit C_z bezeichnen wollen, sind also zunächst auf die oben beschriebene Weise die Werte der beiden Parameter λ und c zu ermitteln,

woraufhin die Abbildung ihres Außengebiets mit Hilfe der Funktion (46,22), die sich gemäß (43,41) auch durch eine Reihenentwicklung von der Form

$$\zeta^* = z + \frac{c^2}{3} \cdot (1 - \lambda^2) \cdot \frac{1}{z} + \dots \quad (46,3)$$

zur Darstellung bringen läßt, auf das Außengebiet einer kreisähnlichen Kurve C_{ζ^*} der Z^* -Ebene vorgenommen werden kann. Alsdann denken wir uns in der Z^* -Ebene einen Kreis k_0 derart gezeichnet, daß er die kreisähnliche Kurve C_{ζ^*} in dem Bildpunkt der Profilecke S berührt, und daß die von ihm berandete Kreisfläche κ_0 , nach Augenmaß abgeschätzt, denselben Flächeninhalt wie das von C_{ζ^*} berandete Innengebiet besitzt. Ist ϱ_0 der Radius und $\zeta^* = \mu_0$ der Mittelpunkt dieses Kreises k_0 , so führen wir jetzt die durch die Funktion

$$t = \frac{\varrho_0}{\zeta^* - \mu_0} \quad (46,4)$$

vermittelte Abbildung der Z^* -Ebene auf die T -Ebene aus, wodurch das Außengebiet der kreisähnlichen Kurve C_{ζ^*} der Z^* -Ebene in das Innengebiet B_t einer beschränkten geschlossenen Kurve C_t der T -Ebene übergeführt wird, und zwar derart, daß dabei dem unendlich fernen Punkt $\zeta^* = \infty$ der Z^* -Ebene der Nullpunkt $t = 0$ der T -Ebene entspricht. Der Zusammenhang zwischen den Variablen t und z ist gemäß (46,4) und (46,3) durch

$$t = \frac{\varrho_0}{z - \mu_0 - \frac{c^2}{3} \cdot (\lambda^2 - 1) \cdot \frac{1}{z} + \dots}$$

oder

$$t = \varrho_0 \cdot \frac{1}{z} + \mu_0 \cdot \varrho_0 \cdot \frac{1}{z^2} + \left\{ \frac{c^2}{3} \varrho_0 \cdot (\lambda^2 - 1) + \varrho_0 \cdot \mu_0^2 \right\} \cdot \frac{1}{z^3} + \dots \quad (46,41)$$

gegeben.

Um sodann das kreisflächenähnliche Innengebiet B_t der T -Ebene unter Festhaltung des Nullpunktes auf eine Kreisfläche der W -Ebene abzubilden, hätten wir auf Grund der in § 25 enthaltenen Darlegungen diejenige Funktion $w = w(t)$ mit der Reihenentwicklung

$$w = w(t) = t + A_2 \cdot t^2 + A_3 \cdot t^3 + \dots$$

anzusetzen, die unter allen analytischen, in B_t regulären Funktionen $w(t)$ dem über B_t erstreckten Flächenintegral

$$\int \int_{(B_t)} w'(t) \cdot \overline{w'(t)} \, dx \, dy$$

den kleinsten Wert erteilt. Statt dessen aber begnügen wir uns mit

Rücksicht auf die zeichnerische Durchführung der Aufgabe mit der Benutzung eines „Minimalpolynoms“ vierten Grades von der Form

$$w = t + A_2 \cdot t^2 + A_3 \cdot t^3 + A_4 \cdot t^4, \quad (46,5)$$

dessen drei komplexe Koeffizienten A_2 , A_3 und A_4 gemäß (25,41) bzw. (25,42) aus den linearen Gleichungssystemen

$$\left. \begin{aligned} \tau_{10} + 2 \cdot \tau_{11} \cdot \bar{A}_2 + 3 \cdot \tau_{12} \cdot \bar{A}_3 + 4 \cdot \tau_{13} \cdot \bar{A}_4 &= 0, \\ \tau_{20} + 2 \cdot \tau_{21} \cdot \bar{A}_2 + 3 \cdot \tau_{22} \cdot \bar{A}_3 + 4 \cdot \tau_{23} \cdot \bar{A}_4 &= 0, \\ \tau_{30} + 2 \cdot \tau_{31} \cdot \bar{A}_2 + 3 \cdot \tau_{32} \cdot \bar{A}_3 + 4 \cdot \tau_{33} \cdot \bar{A}_4 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (46,511)$$

bzw.

$$\left. \begin{aligned} \tau_{01} + 2 \cdot \tau_{11} \cdot A_2 + 3 \cdot \tau_{21} \cdot A_3 + 4 \cdot \tau_{31} \cdot A_4 &= 0, \\ \tau_{02} + 2 \cdot \tau_{12} \cdot A_2 + 3 \cdot \tau_{22} \cdot A_3 + 4 \cdot \tau_{32} \cdot A_4 &= 0, \\ \tau_{03} + 2 \cdot \tau_{13} \cdot A_2 + 3 \cdot \tau_{23} \cdot A_3 + 4 \cdot \tau_{33} \cdot A_4 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (46,512)$$

zu berechnen sind, wobei gemäß (25,4)

$$\tau_{\mu\nu} = \iint_{(B_t)} t^\mu \cdot \bar{t}^\nu dx dy \quad (46,52)$$

zu setzen ist. Dadurch wird zwar das als Bildgebiet von B_t in der W -Ebene entstehende Gebiet B_w keine exakte Kreisfläche sein; allein man darf doch erwarten, daß es einer solchen mit größerer Annäherung als das kreisflächenähnliche Gebiet B_t der T -Ebene gleichen wird. Aus (46,41) folgt

$$\begin{aligned} t^2 &= \frac{\varrho_0^2}{z^2} \cdot \left\{ 1 + \frac{2\mu_0}{z} + \frac{3\mu_0^2 + \frac{2}{3}c^2(\lambda^2 - 1)}{z^2} + \dots \right\}, \\ t^3 &= \frac{\varrho_0^3}{z^3} \cdot \left\{ 1 + \frac{3\mu_0}{z} + \frac{6\mu_0^2 + c^2(\lambda^2 - 1)}{z^2} + \dots \right\}, \\ t^4 &= \frac{\varrho_0^4}{z^4} \cdot \left\{ 1 + \frac{4\mu_0}{z} + \frac{10\mu_0^2 + \frac{4}{3}c^2(\lambda^2 - 1)}{z^2} + \dots \right\}, \end{aligned}$$

so daß gemäß (46,5)

$$\begin{aligned} w &= \frac{\varrho_0}{z} + \frac{\mu_0 \varrho_0 + \varrho_0^2 \cdot A_2}{z^2} \\ &+ \frac{\frac{c^2}{3} \varrho_0 (\lambda^2 - 1) + \varrho_0 \mu_0^2 + 2\mu_0 \varrho_0^2 A_2 + \varrho_0^3 A_3}{z^3} + \dots \quad (46,53) \end{aligned}$$

wird.

Um jetzt das Innengebiet B_w der W -Ebene auf das Außengebiet eines „Kreises“ C_{w^*} der W^* -Ebene mit dem Mittelpunkt $w^* = 0$ abzubilden,¹⁾ setzen wir

$$w^* = \frac{\varrho_0}{w}, \quad (46,6)$$

wofür wir wegen (46,53) auch

$$w^* = \frac{\varrho_0}{\varrho_0 \cdot \left\{ \frac{1}{z} + \frac{\mu_0 + \varrho_0 A_2}{z^2} + \frac{\frac{c^2}{3}(\lambda^2 - 1) + \mu_0^2 + 2\mu_0 \varrho_0 A_2 + \varrho_0^2 A_3}{z^3} + \dots \right\}}$$

oder

$$w^* = z - (\mu_0 + \varrho_0 A_2) - \frac{\frac{c^2}{3}(\lambda^2 - 1) + \varrho_0^2 (A_3 - A_2^2)}{z} + \dots \quad (46,61)$$

schreiben können. Durch die Translation

$$\zeta = w^* + (\mu_0 + \varrho_0 A_2) \quad (46,7)$$

wird alsdann erreicht, daß die Abbildungsfunktion $\zeta = f(z)$ eine gemäß (39,1) als definitiv zu bezeichnende Entwicklung von der Form

$$\zeta = f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \dots \quad (46,71)$$

erhält, wobei insbesondere

$$a_1 = - \left\{ \frac{c^2}{3}(\lambda^2 - 1) + \varrho_0^2 \cdot (A_3 - A_2^2) \right\} \quad (46,72)$$

gilt. Das Außengebiet des „Kreises“ C_{w^*} der W^* -Ebene mit dem Mittelpunkt $w^* = 0$ geht durch die Abbildung (46,7) in das Außengebiet eines kongruenten „Kreises“ C_ζ der Z -Ebene über, dessen Mittelpunkt M durch

$$\zeta_M = m = \mu_0 + \varrho_0 A_2 \quad (46,73)$$

gegeben ist. Dieser „Kreis“ C_ζ der Z -Ebene stellt dann den „Grundkreis k “ des in der Z -Ebene vorgelegten Tragflächenprofils dar, womit die zu lösende Abbildungsaufgabe als erledigt anzusehen ist.

Es liegt auf der Hand, daß die praktisch-zeichnerische Durchführung des vorstehend geschilderten Verfahrens sehr erhebliche Schwierigkeiten bereitet. Sie ist fast gleichzeitig von *W. Müller* sowie von *F. Höhn-*

¹⁾ Wir fassen hier also das zuvor in der W -Ebene erhaltene kreisflächenähnliche Gebiet B_w als ein von einem „Kreis“ C_w mit dem Mittelpunkt $w = 0$ berandetes Gebiet auf. Der oben erwähnte „Kreis“ C_{w^*} stellt dann die durch die Funktion (46,6) in der W^* -Ebene gelieferte Bildkurve jenes „Kreises“ C_w der W -Ebene dar.

dorf für verschiedene Beispiele bewältigt worden¹⁾). Um eine Vorstellung von dem dabei Erreichten vermitteln zu können, geben wir in den Figuren 67, 68 und 69 die von Höhndorf erhaltenen graphischen Resultate

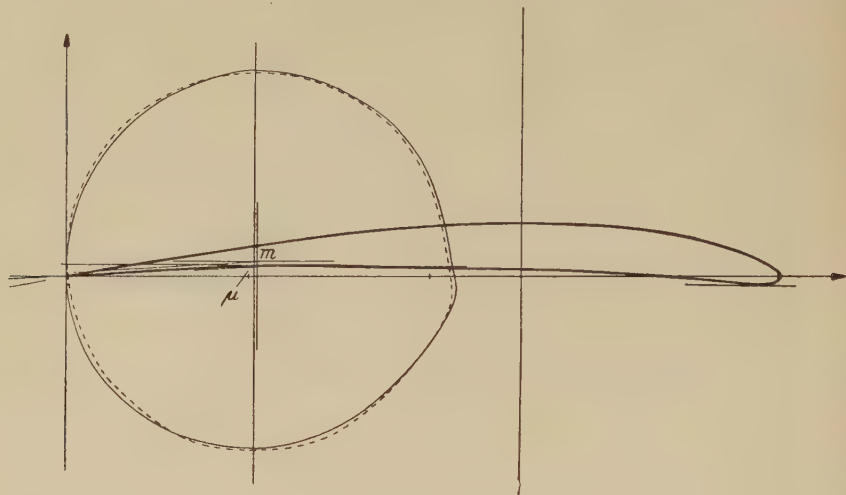


Fig. 67.

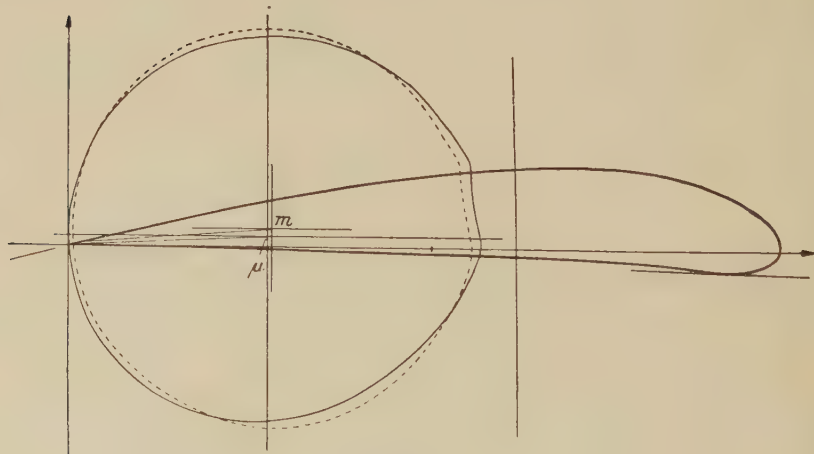


Fig. 68.

wieder. Hier sind — in der von uns zuvor benutzten Bezeichnung — die Z -, die Z^* - und die Z -Ebene zu einer einzigen Ebene vereinigt worden, wobei sich allerdings die einzelnen Koordinatenkreuze nicht decken, was aber natürlich durchaus belanglos ist. Jede Figur zeigt zunächst

¹⁾ Vgl. W. Müller, Zs. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 5, S. 397; 1925; Fr. Höhndorf, ebenda Bd. 6, S. 265; 1926.

das betr. Profil, in dem die willkürlich in seinem abgerundeten Vorderende gewählte Stelle $z = +\lambda c$ (wiederum gemäß unserer Bezeichnungsweise gesprochen) besonders markiert zu denken ist. Die ausgezogene kreisähnliche Kurve stellt unsere Kurve C_{ζ^*} der Z^* -Ebene dar, während die gestrichelte Kurve den „Grundkreis k “ der Z -Ebene bildet. Vergleicht man beide miteinander, so erkennt man deutlich, daß die mehr oder minder elliptische Form von C_{ζ^*} beim Übergang zum „Grundkreis k “ sehr gut kreisförmig wird; die Aus- bzw. Einbuchtungen allerdings, die den vorderen Teilen der Profilkonturen entsprechen, verschwinden noch nicht völlig, doch werden sie immerhin merklich schwächer.

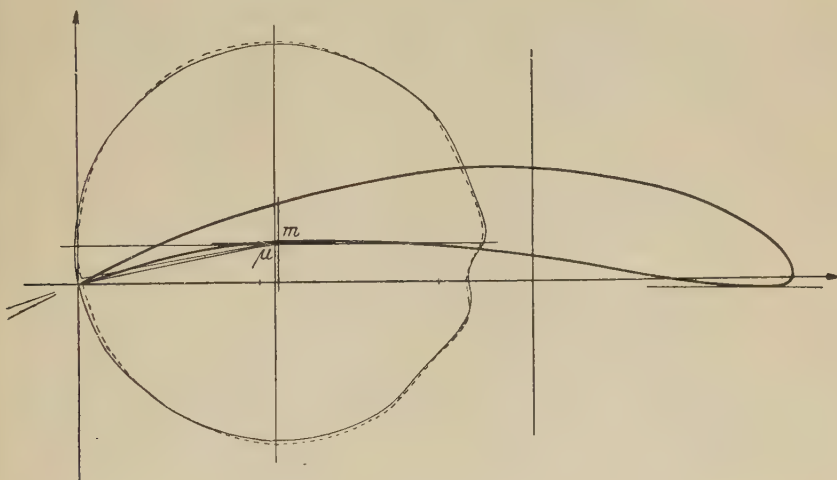


Fig. 69.

Nachdem die einschlägige Abbildungsaufgabe ihre Lösung gefunden hat, bleibt zur Bestimmung der Auftriebseigenschaften eines vorgelegten Profils lediglich die Ermittlung der hierfür erforderlichen Parameter a , c_1^2 , β und γ übrig. Am einfachsten lassen sich c_1^2 und γ berechnen, da gemäß (35,31) und (46,72)

$$c_1^2 \cdot e^{2i\gamma} = \frac{c^2}{3} (\lambda^2 - 1) + \varrho_0^2 \cdot (A_3 - A_2^2),$$

mithin

$$c_1^2 = \left| \frac{c^2}{3} (\lambda^2 - 1) + \varrho_0^2 \cdot (A_3 - A_2^2) \right| \quad (46,81)$$

sowie

$$\gamma = \frac{1}{2} \arg \left\{ \frac{c^2}{3} (\lambda^2 - 1) + \varrho_0^2 \cdot (A_3 - A_2^2) \right\} \quad (46,82)$$

gilt. Der Grundkreisradius a muß durch Abschätzung aus den Zeich-

nungen entnommen werden. Da sich ungefähr 75 % der die Rolle des „Grundkreises“ spielenden Kurve C_ζ der Z -Ebene durch einen Kreisbogen um den in (46,73) notierten Mittelpunkt ζ_M gut approximieren lassen, so kann man den Radius dieses Bogens als Grundkreisradius wählen. Auch der Bildpunkt ζ_S der Profilecke S ist rein zeichnerisch zu bestimmen. Mit seiner Hilfe berechnet sich gemäß (32,4)

$$a \cdot e^{i\beta} = m - \zeta_S,$$

wofür wir wegen (46,73) auch

$$a \cdot e^{i\beta} = \mu_0 + \varrho_0 A_2 - \zeta_S \quad (46,83)$$

schreiben können. Damit haben wir dann sämtliche Daten beisammen, durch die der Betrag und das statische Moment des Auftriebs gemäß (34,6) bzw. (35,5) festgelegt sind.

Sechstes Kapitel.

Wirbelbewegungen.

§ 47. Wirbellinien, Wirbelröhren und Wirbelfäden.

Die Grundlage der Theorie der Wirbelbewegungen bilden die bereits in § 10 abgeleiteten, auf der substantiellen Betrachtungsweise fußenden *Cauchyschen* Relationen¹⁾

$$\left. \begin{aligned} w_x^* &= \frac{\partial x^*}{\partial a} \cdot w_a^* + \frac{\partial x^*}{\partial b} \cdot w_b^* + \frac{\partial x^*}{\partial c} \cdot w_c^*, \\ w_y^* &= \frac{\partial y^*}{\partial a} \cdot w_a^* + \frac{\partial y^*}{\partial b} \cdot w_b^* + \frac{\partial y^*}{\partial c} \cdot w_c^*, \\ w_z^* &= \frac{\partial z^*}{\partial a} \cdot w_a^* + \frac{\partial z^*}{\partial b} \cdot w_b^* + \frac{\partial z^*}{\partial c} \cdot w_c^*, \end{aligned} \right\} \quad (47,1)$$

in denen a, b, c bzw. w_a^*, w_b^*, w_c^* die Koordinaten bzw. Winkelgeschwindigkeitskomponenten eines Flüssigkeitsteilchens zur Zeit $t = 0$ bedeuten, während x^*, y^*, z^* bzw. w_x^*, w_y^*, w_z^* die entsprechenden Größen desselben Teilchens zur beliebigen Zeit t darstellen. Da die Determinante des Gleichungssystems (47,1) gemäß (8,34) von Null verschieden ist, so gehört zu jedem nicht identisch verschwindenden Wertetripel w_x^*, w_y^*, w_z^* stets ein und nur ein nicht identisch verschwindendes Wertetripel w_a^*, w_b^*, w_c^* und umgekehrt, so daß also ein bestimmtes Flüssigkeitsteilchen entweder immer oder nie rotiert. Da wir solche Teile

¹⁾ Vgl. (10,21), (10,22) und (10,23).

der Flüssigkeit, deren einzelne Teilchen um gewisse durch sie hindurchgehende Achsen erfolgende Drehbewegungen ausführen, als *Wirbel* bezeichnen wollten (vgl. S. 37), so besagt das soeben ausgesprochene Resultat, daß *Wirbel in einer idealen Flüssigkeit weder entstehen noch vergehen können*. Solche Wirbel sind demnach materielle Gebilde mit individueller, unzerstörbarer Existenz, die sich in den nicht-rotierenden Teilen der Flüssigkeit wie Fremdkörper fortzubewegen vermögen, wobei natürlich ihre geometrische Gestalt im allgemeinen mehr oder minder erhebliche Änderungen erfahren wird.

Sei zur Zeit $t = 0$ eine Kurve l_0 durch die Parameterdarstellung

$$a = a(\lambda), \quad b = b(\lambda), \quad c = c(\lambda) \quad (47,2)$$

gegeben, deren Tangente in jedem Kurvenpunkt die Richtung der Rotationsachse des dort lokalisierten Flüssigkeitsteilchens besitzt. Da für die Richtungskosinusse der Kurventangente

$$\cos(s, a) = \mu_1 \frac{da}{d\lambda}, \quad \cos(s, b) = \mu_1 \frac{db}{d\lambda}, \quad \cos(s, c) = \mu_1 \frac{dc}{d\lambda}$$

mit

$$\mu_1 = \left\{ \left(\frac{da}{d\lambda} \right)^2 + \left(\frac{db}{d\lambda} \right)^2 + \left(\frac{dc}{d\lambda} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

gilt, und da andererseits nach Voraussetzung

$$\cos(s, a) = \mu_2 \cdot w_a^*, \quad \cos(s, b) = \mu_2 \cdot w_b^*, \quad \cos(s, c) = \mu_2 \cdot w_c^*$$

mit

$$\mu_2 = \{w_a^{*2} + w_b^{*2} + w_c^{*2}\}^{-1/2}$$

sein sollte, so ist die Kurve l_0 durch das Differentialgleichungssystem

$$\frac{da}{d\lambda} = \mu \cdot w_a^*, \quad \frac{db}{d\lambda} = \mu \cdot w_b^*, \quad \frac{dc}{d\lambda} = \mu \cdot w_c^* \quad (47,21)$$

mit

$$\mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

gekennzeichnet. Infolge der Bewegung werden sich nun die zur Zeit $t = 0$ längs l_0 gelegenen Flüssigkeitsteilchen zur Zeit $t = t_1$ auf einer Kurve l_1 befinden, die sich gemäß (6,1) und (47,2) durch

$$\begin{aligned} x^* &= f_1 \{a(\lambda), b(\lambda), c(\lambda), t_1\}, & y^* &= f_2 \{a(\lambda), b(\lambda), c(\lambda), t_1\}, \\ z^* &= f_3 \{a(\lambda), b(\lambda), c(\lambda), t_1\} \end{aligned}$$

darstellen läßt. Durch Differentiation dieses Gleichungstripels ergibt sich unter Beachtung von (47,21)

$$\begin{aligned}\frac{dx^*}{d\lambda} &= \frac{\partial x^*}{\partial a} \cdot \frac{da}{d\lambda} + \frac{\partial x^*}{\partial b} \cdot \frac{db}{d\lambda} + \frac{\partial x^*}{\partial c} \cdot \frac{dc}{d\lambda} \\ &= \mu \cdot \left\{ \frac{\partial x^*}{\partial a} \cdot w_a^* + \frac{\partial x^*}{\partial b} \cdot w_b^* + \frac{\partial x^*}{\partial c} \cdot w_c^* \right\}, \\ \frac{dy^*}{d\lambda} &= \frac{\partial y^*}{\partial a} \cdot \frac{da}{d\lambda} + \frac{\partial y^*}{\partial b} \cdot \frac{db}{d\lambda} + \frac{\partial y^*}{\partial c} \cdot \frac{dc}{d\lambda} \\ &= \mu \cdot \left\{ \frac{\partial y^*}{\partial a} \cdot w_a^* + \frac{\partial y^*}{\partial b} \cdot w_b^* + \frac{\partial y^*}{\partial c} \cdot w_c^* \right\}, \\ \frac{dz^*}{d\lambda} &= \frac{\partial z^*}{\partial a} \cdot \frac{da}{d\lambda} + \frac{\partial z^*}{\partial b} \cdot \frac{db}{d\lambda} + \frac{\partial z^*}{\partial c} \cdot \frac{dc}{d\lambda} \\ &= \mu \cdot \left\{ \frac{\partial z^*}{\partial a} \cdot w_a^* + \frac{\partial z^*}{\partial b} \cdot w_b^* + \frac{\partial z^*}{\partial c} \cdot w_c^* \right\},\end{aligned}$$

woraus wegen (47,1) die zu (47,21) völlig analogen Relationen

$$\frac{dx^*}{d\lambda} = \mu \cdot w_x^*, \quad \frac{dy^*}{d\lambda} = \mu \cdot w_y^*, \quad \frac{dz^*}{d\lambda} = \mu \cdot w_z^* \quad (47,3)$$

folgen. Für jede Wirbelbewegung existiert demnach ein System von Kurven, durch das die einzelnen rotierenden Flüssigkeitsteilchen derart perlschnurförmig aneinandergereiht erscheinen, daß jede Kurventangente stets in die augenblickliche Richtung der Rotationsachse des zugehörigen Flüssigkeitsteilchens weist. Diese Kurven werden als die *Wirbellinien* der betrachteten Flüssigkeitsströmung bezeichnet. Denkt man sich dann durch jeden Punkt einer kleinen geschlossenen, sich nicht überkreuzenden Kurve die zugehörige Wirbellinie hindurchgelegt, so bildet die Gesamtheit dieser Wirbellinien eine *Wirbelröhre*, deren flüssiger Inhalt ein *Wirbelfaden* genannt wird. Auf diese Weise werden also die wirbelnden Teile einer Strömung in ein System von Wirbelfäden aufgelöst, deren jeder stets aus denselben Flüssigkeitsteilchen besteht, und die als permanente, frei bewegliche Gebilde in die übrige, nicht rotierende Flüssigkeit eingebettet sind.

§ 48. Zirkulationsstärke und Intensität eines Wirbelfadens.

Betrachten wir eine geschlossene Kurve L_1 , die einen einzelnen, in einer im übrigen wirbelfreien Strömung befindlichen Wirbelfaden umschlingt, so ist die Zirkulation J_{L_1} längs L_1 gemäß (5,6) von Null verschieden, da ja ein von L_1 berandetes Flächenstück F_1 den Wirbelfaden durchsetzt, mithin auf ihm der Vektor $\text{rot } \mathbf{v}$ keinesfalls überall verschwin-

det. Wählen wir neben L_1 eine zweite den Wirbelfaden umschlingende geschlossene Kurve L_2 , so muß die zugehörige Zirkulation J_{L_2} denselben Wert wie die Zirkulation J_{L_1} besitzen. Denn verbinden wir (vgl. Fig. 70) einen Punkt von L_1 mit einem Punkt von L_2 durch ein Kurvenstück l , so erhalten wir ein von L_1 , L_2 und dem doppelt zu durchlaufenden Kurvenstück l berandetes Flächenstück, auf dem die Rotation der Strömungsgeschwindigkeit überall verschwindet, so daß gemäß (5,6)

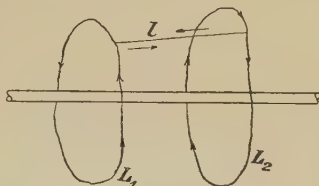


Fig. 70.

$$\int_{(L_1)} v_s ds + \int_{(l)} v_s ds - \int_{(L_2)} v_s ds - \int_{(l)} v_s ds = 0,$$

mithin gemäß (5,61)

$$J_{L_1} = J_{L_2}$$

gilt. Wird L_2 in der Richtung des Wirbelfadens fortgeschoben, so darf demnach die Zirkulation J_{L_2} nie eine Änderung erfahren; *infolgedessen kann ein Wirbelfaden weder Anfang noch Ende besitzen, so daß lediglich geschlossene oder beiderseits unbegrenzt ausgedehnte Wirbelfäden möglich sind.*

Mit der Bewegung des Wirbelfadens ist nun natürlich eine Fortbewegung derjenigen Flüssigkeitsteilchen verbunden, die zur Zeit $t = 0$ auf einer den Wirbelfaden umschlingenden geschlossenen Kurve L_0 gelegen sind. Da aber diese Flüssigkeitsteilchen, wie wir in § 6 bewiesen haben, während des ganzen Strömungsverlaufs auf einer geschlossenen Kurve L — die eben zur Zeit $t = 0$ mit L_0 übereinstimmt — verbleiben müssen, so liegt die Frage nahe, wie sich dabei die Größe der Zirkulation längs dieser zeitlich veränderlichen Kurve L verhält, die gemäß (5,61) durch

$$J_L = \int_{(L)} \{ v_x^* dx^* + v_y^* dy^* + v_z^* dz^* \} \quad (48,1)$$

gegeben ist. In diesem Ausdruck sind die substantiellen Geschwindigkeitskomponenten v_x^* , v_y^* und v_z^* zunächst als Funktionen von x^* , y^* und z^* anzusehen, da sich ja die ins Auge gefaßten Flüssigkeitsteilchen, in ihrer Gesamtheit stets eine geschlossene Kurve L bildend, durch das Strömungsgebiet hindurchbewegen, mithin beständig zu Stellen mit anderen Werten des lokalen Geschwindigkeitsvektors $\mathfrak{v}$ gelangen. Die Koordinaten x^* , y^* , z^* sind aber ihrerseits gemäß (6,1) Funktionen der Anfangskoordinaten a , b , c sowie der Zeit t ; denken wir uns daher die betrachtete Kurve in ihrer Anfangsgestalt L_0 durch

$$a = a(\lambda), \quad b = b(\lambda), \quad c = c(\lambda)$$

mit Hilfe eines Parameters λ dargestellt, so wird L zur Zeit t durch

$$\left. \begin{aligned} x^* &= f_1 \{ a(\lambda), b(\lambda), c(\lambda), t \} = x^*(\lambda, t), \\ y^* &= f_2 \{ a(\lambda), b(\lambda), c(\lambda), t \} = y^*(\lambda, t), \\ z^* &= f_3 \{ a(\lambda), b(\lambda), c(\lambda), t \} = z^*(\lambda, t) \end{aligned} \right\} \quad (48,11)$$

in Abhängigkeit von λ und t gegeben sein. Sind ferner α und β die Endpunkte desjenigen Intervalls, das λ durchlaufen muß, um sämtliche Punkte von L zu liefern, so muß, da ja L_0 und L geschlossene Kurven sind, sowohl

$$a(\alpha) = a(\beta), \quad b(\alpha) = b(\beta), \quad c(\alpha) = c(\beta)$$

als auch

$$x^*(\alpha, t) = x^*(\beta, t), \quad y^*(\alpha, t) = y^*(\beta, t), \quad z^*(\alpha, t) = z^*(\beta, t) \quad (48,12)$$

gelten. Führen wir nun in (48,1) den Parameter λ als Integrationsvariable ein, so erhalten wir

$$J_L = \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ v_x^* \cdot \frac{\partial x^*}{\partial \lambda} + v_y^* \cdot \frac{\partial y^*}{\partial \lambda} + v_z^* \cdot \frac{\partial z^*}{\partial \lambda} \right\} d\lambda,$$

wobei jetzt v_x^* , v_y^* und v_z^* gemäß (48,11) als Funktionen von λ und t aufzufassen sind. Infolgedessen stellt die vorstehende Gleichung die Zirkulation $J_L = J_L(t)$ als Funktion der Zeit t dar, deren Differentiation die Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{dJ_L}{dt} &= \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ \frac{dv_x^*}{dt} \cdot \frac{\partial x^*}{\partial \lambda} + \frac{dv_y^*}{dt} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial \lambda} + \frac{dv_z^*}{dt} \cdot \frac{\partial z^*}{\partial \lambda} \right. \\ &\quad \left. + v_x^* \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^*}{\partial \lambda} \right) + v_y^* \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y^*}{\partial \lambda} \right) + v_z^* \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z^*}{\partial \lambda} \right) \right\} d\lambda \end{aligned}$$

liefert, wofür wir wegen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x^*}{\partial \lambda} \right) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{dx^*}{dt} \right) = \frac{\partial v_x^*}{\partial \lambda}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial y^*}{\partial \lambda} \right) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{dy^*}{dt} \right) = \frac{\partial v_y^*}{\partial \lambda}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial z^*}{\partial \lambda} \right) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{dz^*}{dt} \right) = \frac{\partial v_z^*}{\partial \lambda} \end{aligned}$$

mit Benutzung von (8,21)

$$\frac{dJ_L}{dt} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ - \left(U^* + \frac{p^*}{\varrho} \right) + \frac{1}{2} (v_x^{*2} + v_y^{*2} + v_z^{*2}) \right\} d\lambda \quad (48,13)$$

schreiben können. Hierin sind natürlich auch U^* und p^* — genau wie v_x^* , v_y^* , v_z^* — durch Vermittelung von (48,11) als Funktionen von λ und t anzusehen, und gemäß (48,12) muß

$$U^*(a, t) = U^*(\beta, t) \quad \text{und} \quad p^*(a, t) = p^*(\beta, t)$$

sowie

$$v_x^*(a, t) = v_x^*(\beta, t), \quad v_y^*(a, t) = v_y^*(\beta, t), \quad v_z^*(a, t) = v_z^*(\beta, t)$$

gelten. Durch Ausführung der Integration liefert demnach (48,13) die Beziehung

$$\frac{dJ_L}{dt} = 0 \quad \text{oder} \quad J_L(t) = \text{const.},$$

und dies besagt, daß die Zirkulation längs L bei der Fortbewegung dieser Kurve durch das Strömungsgebiet keine Änderung erfährt.

Insgesamt ergibt sich somit, daß für jeden Wirbelfaden die Zirkulation längs einer beliebigen ihn umschlingenden geschlossenen Kurve eine örtliche und zeitliche, auf Grund der am Schluß von § 5 getroffenen Vereinbarung stets positive Konstante J darstellt, durch die der Wirbelfaden vollkommen gekennzeichnet ist, und die daher die *Zirkulationsstärke* des Wirbelfadens genannt wird. Wenden wir nun (5,6) auf einen Querschnitt f des Wirbelfadens an, so erhalten wir

$$\int_{(f)} \text{rot}_n \mathbf{v} \, d\omega = J,$$

woraus auf Grund des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung

$$(\text{rot}_n \mathbf{v})_0 \cdot \omega = J \quad (48,2)$$

folgt, unter ω den Flächeninhalt des Fadenquerschnitts f sowie unter $(\text{rot}_n \mathbf{v})_0$ den Wert von $\text{rot}_n \mathbf{v}$ an einer gewissen auf f gelegenen Stelle P_0 verstanden. Für einen hinreichend dünnen Wirbelfaden muß aber der Vektor $\text{rot} \mathbf{v}$ in P_0 auf dem Fadenquerschnitt f senkrecht stehen, da ja die Richtung des Fadens definitionsgemäß mit der Richtung des Winkelgeschwindigkeitsvektors zusammenfällt, so daß gemäß (9,41)

$$(\text{rot}_n \mathbf{v})_0 = 2w_0$$

gesetzt werden kann, falls w_0 den Betrag des Winkelgeschwindigkeitsvektors $\mathbf{w}$ an der Stelle P_0 bedeutet. Gemäß (48,2) gilt daher

$$2\omega w_0 = J, \quad (48,3)$$

und diese Beziehung besagt, daß das Produkt aus dem Flächeninhalt ω eines Fadenquerschnitts f und der zugehörigen mittleren Winkelgeschwindigkeit w_0 eine für den Wirbelfaden charakteristische örtliche und zeitliche positive Konstante darstellt. Dieses Produkt wird daher als die *Intensität* oder auch als die *Stärke* des Wirbelfadens bezeichnet, und (48,3) kann somit dahin zum Ausdruck gebracht werden, daß die Zirkulations-

stärke eines Wirbelfadens der doppelten Wirbelintensität gleich ist. Allgemeiner ergibt sich hieraus unmittelbar, daß die Zirkulation längs einer beliebigen geschlossenen Kurve stets doppelt so groß ist wie die Summe der Intensitäten sämtlicher Wirbelfäden, die von jener Kurve umzogen werden. Denken wir uns daher eine geschlossene Kurve L von fester Gestalt durch eine Flüssigkeit fortbewegt, so kann die Zirkulation längs L im Verlauf der Bewegung dann und nur dann eine Änderung erfahren, falls die Kurve L dabei eine gewisse Anzahl von Wirbelfäden durchschneidet, und zwar muß die Gesamtintensität dieser Wirbelfäden dem halben Betrag der eingetretenen Zirkulationsänderung gleich sein.

§ 49. Das Geschwindigkeitsfeld vorgegebener Wirbelsysteme.

Wenn uns die Geschwindigkeitskomponenten v_x , v_y und v_z einer ein gewisses Raumgebiet durchsetzenden Flüssigkeitsströmung in Abhängigkeit von den Ortskoordinaten x , y , z sowie von der Zeit t bekannt sind, so lassen sich aus ihnen gemäß (9,4) die drei Winkelgeschwindigkeitskomponenten w_x , w_y und w_z auf Grund der Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} w_x &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \\ w_y &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \\ w_z &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (49,1)$$

in völlig eindeutiger Weise als Funktionen der vier Argumente x , y , z und t ermitteln. Im allgemeinen werden diese Funktionen in Bezug auf x , y , z unstetig sein, da sie ja überall dort, wo sich Wirbelfäden befinden, von Null verschieden sind, während sie in den übrigen, nicht rotierenden Teilen der Flüssigkeit verschwinden müssen. Ferner erfüllen sie die Relation

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0, \quad (49,11)$$

wie sich unmittelbar durch Differentiation von (49,1) ergibt.

Denken wir uns jetzt umgekehrt eine bestimmte Wirbelverteilung vorgelegt, mithin ein der Bedingung (49,11) genügendes Funktionentripel w_x , w_y , w_z gegeben, so liegt die Frage nahe, ob sich daraus die Geschwindigkeitskomponenten v_x , v_y und v_z rechnerisch ableiten lassen. Dabei wollen wir uns auf den Fall beschränken, daß die Flüssigkeit den ganzen Raum einnimmt, und daß sich die wirbelnden Teile der Flüssigkeit sämt-

lich im Endlichen befinden¹⁾; überdies soll für die Strömungsgeschwindigkeitskomponenten

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^2 \cdot v_x = \lim_{R \rightarrow \infty} R^2 \cdot v_y = \lim_{R \rightarrow \infty} R^2 \cdot v_z = 0 \quad (49,12)$$

mit

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

gelten. Dann läuft unsere Frage auf die Lösung des Problems hinaus, ein System v_x, v_y, v_z von raumzeitlichen Funktionen anzugeben, das mit den bekannten Funktionen w_x, w_y, w_z durch die Relationen (49,1) zusammenhängt, das überdies gemäß (5,3) der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (49,13)$$

genügt, und das schließlich die Bedingungen (49,12) erfüllt.

Zunächst läßt sich sehr leicht einsehen, daß dieses Problem höchstens eine Lösung besitzen kann. Sind nämlich $v_x^{(1)}, v_y^{(1)}, v_z^{(1)}$ und $v_x^{(2)}, v_y^{(2)}, v_z^{(2)}$ zwei den vorgeschriebenen Bedingungen (49,1), (49,12) und (49,13) genügende Funktionentripel, so folgt, falls

$$v_x^{(0)} = v_x^{(1)} - v_x^{(2)}, \quad v_y^{(0)} = v_y^{(1)} - v_y^{(2)}, \quad v_z^{(0)} = v_z^{(1)} - v_z^{(2)} \quad (49,2)$$

gesetzt wird, aus (49,1) das Gleichungssystem

$$\frac{\partial v_z^{(0)}}{\partial y} = \frac{\partial v_y^{(0)}}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_x^{(0)}}{\partial z} = \frac{\partial v_z^{(0)}}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y^{(0)}}{\partial x} = \frac{\partial v_x^{(0)}}{\partial y}, \quad (49,21)$$

dem zufolge eine Funktion $\varphi_0(x, y, z, t)$ derart existieren²⁾ muß, daß

$$v_x^{(0)} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, \quad v_y^{(0)} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}, \quad v_z^{(0)} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \quad (49,22)$$

gilt. Ferner liefert (49,13) die Beziehung

$$\frac{\partial v_x^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial v_y^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial v_z^{(0)}}{\partial z} = 0,$$

die sich wegen (49,22) in der Form

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} = 0$$

schreiben läßt. Und da auf Grund des *Stokesschen* Integralsatzes³⁾ für

¹⁾ Die vorgelegte Wirbelverteilung muß sich demnach auf Grund der in § 48 angestellten Überlegungen in ein System geschlossener Wirbelfäden, d. h. sogenannter *Wirbelringe*, auflösen lassen.

²⁾ Vgl. die Fußnote auf S. 38.

³⁾ Vgl. (5,4) auf S. 18.

jedes beliebige, von einer geschlossenen Raumkurve L berandete Flächenstück F

$$\int_{(F)} \left\{ \left(\frac{\partial v_z^{(0)}}{\partial y} - \frac{\partial v_y^{(0)}}{\partial z} \right) \cdot \cos(n, x) + \left(\frac{\partial v_x^{(0)}}{\partial z} - \frac{\partial v_z^{(0)}}{\partial x} \right) \cdot \cos(n, y) + \left(\frac{\partial v_y^{(0)}}{\partial x} - \frac{\partial v_x^{(0)}}{\partial y} \right) \cdot \cos(n, z) \right\} d\omega = \int_{(L)} \left\{ v_x^{(0)} dx + v_y^{(0)} dy + v_z^{(0)} dz \right\},$$

mithin wegen (49,21) und (49,22)

$$\begin{aligned} \int_{(L)} \left\{ v_x^{(0)} dx + v_y^{(0)} dy + v_z^{(0)} dz \right\} &= \int_{(L)} \left\{ \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds} \right\} ds \\ &= \int_{(L)} \frac{\partial \varphi_0}{\partial s} ds = 0 \end{aligned}$$

wird, überdies aber gemäß (49,12) und (49,22)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^2 \cdot \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = \lim_{R \rightarrow \infty} R^2 \cdot \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} = \lim_{R \rightarrow \infty} R^2 \cdot \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = 0 \quad (49,23)$$

gilt, so ist $\varphi_0(x, y, z, t)$ eine überall eindeutige, beschränkte, im Unendlichen reguläre Potentialfunktion. Für jeden um den Nullpunkt als Mittelpunkt mit beliebigem Radius R gelegten Kugelkörper K muß alsdann die Beziehung¹⁾

$$\begin{aligned} \int_{(K)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau &= - \int_{(K)} \varphi_0 \cdot \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} d\omega \\ &= - \int_0^{2\pi} d\Theta \int_0^\pi \varphi_0 \cdot \left(R^2 \cdot \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} \right) \cdot \sin \vartheta d\vartheta \end{aligned}$$

bestehen, unter K die Berandung von K verstanden, woraus wegen (49,23)

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{(K)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} \right)^2 \right\} d\tau = 0$$

folgt. Dies besagt aber, da der Integrand eine Summe von positiven Größen darstellt, nichts anderes, als daß im ganzen Raum

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} = 0,$$

mithin für einen festen Zeitpunkt t_0

$$\varphi_0(x, y, z, t_0) = \text{const.}$$

¹⁾ Vgl. z. B. W. Sternberg, Potentialtheorie I (Sammlung Götschen Nr. 901), § 13.

gelten muß, woraus dann gemäß (49,22) und (49,2)

$$v_x^{(1)} = v_x^{(2)}, \quad v_y^{(1)} = v_y^{(2)}, \quad v_z^{(1)} = v_z^{(2)}$$

folgt, was zu beweisen war.

Um jetzt die unbekannten Funktionen v_x , v_y und v_z zu berechnen, machen wir unter Einführung von drei Hilfsfunktionen $U_1(x, y, z, t)$, $U_2(x, y, z, t)$ und $U_3(x, y, z, t)$ den Ansatz

$$v_x = \frac{\partial U_3}{\partial y} - \frac{\partial U_2}{\partial z}, \quad v_y = \frac{\partial U_1}{\partial z} - \frac{\partial U_3}{\partial x}, \quad v_z = \frac{\partial U_2}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial y}, \quad (49,3)$$

wodurch, wie unmittelbar zu sehen ist, das Bestehen der Kontinuitätsgleichung (49,13) gewährleistet wird. Gemäß (49,1) muß dann z. B.

$$2w_x = \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial x \partial z}$$

oder

$$\begin{aligned} 2w_x &= \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial x \partial z} - \left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial z^2} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_3}{\partial z} \right\} - \Delta U_1 \end{aligned}$$

werden, und indem man in entsprechender Weise mit den in (49,1) für w_y und w_z angegebenen Ausdrücken verfährt sowie zur Abkürzung

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_3}{\partial z} = V \quad (49,31)$$

setzt, gelangt man zu dem Gleichungstripel

$$2w_x = \frac{\partial V}{\partial x} - \Delta U_1, \quad 2w_y = \frac{\partial V}{\partial y} - \Delta U_2, \quad 2w_z = \frac{\partial V}{\partial z} - \Delta U_3, \quad (49,4)$$

aus dem die drei Funktionen U_1 , U_2 und U_3 zu ermitteln sind.

Zur Lösung dieses Problems erinnern wir in Kürze an einige wichtige Tatsachen aus der Potentialtheorie, auf deren Beweise wir uns hier jedoch nicht einlassen können.¹⁾ Sei T_0 ein beschränktes Raumgebiet, das insbesondere auch aus mehreren voneinander getrennten Einzelgebieten bestehen darf, und dessen Gesamtberandung wir mit S_0 bezeichnen wollen. Sei ferner $\varrho(x, y, z)$ eine gewisse Ortsfunktion, die für jeden im Außengebiet von S_0 gelegenen „Aufpunkt“ $P(x, y, z)$ verschwindet, während sie in T_0 von Null verschieden sowie beschränkt und integrabel ist. Setzen wir dann

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}, \quad (49,41)$$

¹⁾ Vgl. hierzu W. Sternberg, l. c. I, § 4, § 23 und § 27.

unter $Q(\xi, \eta, \zeta)$ einen in T_0 gelegenen Punkt verstanden, so stellt das durch den Ansatz

$$U(x, y, z) = \int_{(T_0)} \frac{\varrho}{r} d\tau = \int_{(T_0)} \int \int \frac{\varrho(\xi, \eta, \zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} d\xi d\eta d\zeta \quad (49,42)$$

definierte *Newtonsche Potential* $U(x, y, z)$ nebst seinen durch

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \int_{(T_0)} \varrho \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x} d\tau = - \int_{(T_0)} \varrho \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \xi} d\tau$$

und zwei analoge Relationen gegebenen partiellen Ableitungen erster Ordnung eine im ganzen Raum stetige Ortsfunktion dar, die in allen nicht auf S_0 befindlichen Aufpunkten der *Poissonschen Differentialgleichung*

$$\Delta U = -4\pi\varrho(x, y, z) \quad (49,43)$$

genügt. Demnach ließen sich die drei Gleichungen (49,4) mit den in Analogie zu (49,42) gebildeten Ansätzen

$$U_1 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{(T_0)} \frac{w_x}{r} d\tau, \quad U_2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{(T_0)} \frac{w_y}{r} d\tau, \quad U_3 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{(T_0)} \frac{w_z}{r} d\tau \quad (49,5)$$

erfüllen, falls überall die Relation

$$V = \text{const.} \quad (49,51)$$

bestehen würde¹⁾; dabei ist dann natürlich unter T_0 das von den vorgegebenen Wirbeln eingenommene, nach Voraussetzung beschränkte Raumgebiet zu verstehen. Nun gilt aber²⁾

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1}{\partial x} &= \pm \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{(S_0)} \frac{w_x \cdot \cos(n, x)}{r} d\omega + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{(T_0)} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w_x}{\partial x} d\tau, \\ \frac{\partial U_2}{\partial y} &= \pm \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{(S_0)} \frac{w_y \cdot \cos(n, y)}{r} d\omega + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{(T_0)} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w_y}{\partial y} d\tau, \\ \frac{\partial U_3}{\partial z} &= \pm \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{(S_0)} \frac{w_z \cdot \cos(n, z)}{r} d\omega + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{(T_0)} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w_z}{\partial z} d\tau, \end{aligned}$$

¹⁾ Man beachte dabei, daß gemäß (49,5) in Analogie zu (49,43)

$$\Delta U_1 = -2w_x, \quad \Delta U_2 = -2w_y, \quad \Delta U_3 = -2w_z$$

wird.

²⁾ Vgl. W. Sternberg, l. c. I, § 27.

mithin gemäß (49,31)

$$V = \pm \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{(S_0)} \frac{1}{r} \cdot \{w_x \cdot \cos(n, x) + w_y \cdot \cos(n, y) + w_z \cdot \cos(n, z)\} d\omega \left. \vphantom{\int_{(S_0)}} \right\} + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{(T_0)} \frac{1}{r} \cdot \left\{ \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right\} d\tau, \quad (49,52)$$

wobei für das über S_0 erstreckte Flächenintegral das obere oder das untere Vorzeichen zu wählen ist, je nachdem der Aufpunkt $P(x, y, z)$ dem Innengebiet T_0 oder aber dem Außengebiet von S_0 angehört. Da der Winkelgeschwindigkeitsvektor $\mathbf{w}$ auf der Berandung jedes einzelnen Wirbelfadens definitionsgemäß stets rein tangential gerichtet ist, so muß seine durch

$$w_n = w_x \cdot \cos(n, x) + w_y \cdot \cos(n, y) + w_z \cdot \cos(n, z)$$

gegebene Normalkomponente w_n auf ganz S_0 verschwinden, so daß also

$$\int_{(S_0)} \frac{1}{r} \cdot \{w_x \cdot \cos(n, x) + w_y \cdot \cos(n, y) + w_z \cdot \cos(n, z)\} d\omega = 0$$

wird. Infolgedessen liefert (49,52) unter Berücksichtigung der in ganz T_0 gültigen Relation (49,11) die für jeden Aufpunkt $P(x, y, z)$ bestehende Beziehung

$$V = 0,$$

die mit (49,51) im Einklang steht. Tragen wir daher (49,5) in (49,3) ein, so erhalten wir das gesuchte, allen vorgeschriebenen Bedingungen genügende und durch diese Bedingungen eindeutig bestimmte Lösungssystem

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{(T_0)} \left\{ w_z \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y} - w_y \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z} \right\} d\tau, \\ v_y &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{(T_0)} \left\{ w_x \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z} - w_z \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x} \right\} d\tau, \\ v_z &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{(T_0)} \left\{ w_y \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x} - w_x \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y} \right\} d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (49,6)$$

durch das das Geschwindigkeitsfeld der vorgelegten Wirbelverteilung vollständig beschrieben wird.

§ 50. Das Geschwindigkeitsfeld eines einzelnen Wirbelfadens.

Zu einem sehr bemerkenswerten Ergebnis werden wir nunmehr dadurch gelangen, daß wir die Gleichungen (49,6) auf einen einzelnen Wirbelfaden in Anwendung bringen, dessen Querschnittsinhalt ω überall derartig klein sei, daß die drei in (49,6) auftretenden Integranden in jedem einzelnen Fadenquerschnitt f als Konstanten anzusehen sind. Einen solchen Wirbelfaden können wir uns dann durch eine geschlossene Raumkurve L repräsentiert denken, und (49,6) reduziert sich auf das Gleichungstriplet

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{(L)} \left\{ w_z \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y} - w_y \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z} \right\} \cdot \omega \, ds, \\ v_y &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{(L)} \left\{ w_x \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z} - w_z \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x} \right\} \cdot \omega \, ds, \\ v_z &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{(L)} \left\{ w_y \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x} - w_x \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y} \right\} \cdot \omega \, ds, \end{aligned}$$

in dem die Integranden nur noch als Funktionen der von einem festen Bezugspunkt aus gezählten Bogenlänge s aufzufassen sind. Wegen

$$w_x = w \cdot \cos(w, x), \quad w_y = w \cdot \cos(w, y), \quad w_z = w \cdot \cos(w, z)$$

ergibt sich hieraus unter Beachtung von (48,3)

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{J}{4\pi} \cdot \int_{(L)} \left\{ \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y} \cdot \cos(w, z) - \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z} \cdot \cos(w, y) \right\} ds, \\ v_y &= \frac{J}{4\pi} \cdot \int_{(L)} \left\{ \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z} \cdot \cos(w, x) - \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x} \cdot \cos(w, z) \right\} ds, \\ v_z &= \frac{J}{4\pi} \cdot \int_{(L)} \left\{ \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x} \cdot \cos(w, y) - \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y} \cdot \cos(w, x) \right\} ds, \end{aligned} \right\} \quad (50,1)$$

und da gemäß (49,41)

$$\cos(r, x) = \frac{x - \xi}{r} = \frac{\partial r}{\partial x}, \quad \cos(r, y) = \frac{y - \eta}{r} = \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \cos(r, z) = \frac{z - \zeta}{r} = \frac{\partial r}{\partial z},$$

mithin

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x} &= -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\cos(r, x)}{r^2}, \\ \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y} &= -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{\cos(r, y)}{r^2}, \\ \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z} &= -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{\cos(r, z)}{r^2} \end{aligned} \right\} \quad (50,11)$$

gilt, so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{J}{4\pi} \cdot \int_{(L)} \left\{ \cos(r, z) \cdot \cos(w, y) - \cos(r, y) \cdot \cos(w, z) \right\} \frac{ds}{r^2}, \\ v_y &= \frac{J}{4\pi} \cdot \int_{(L)} \left\{ \cos(r, x) \cdot \cos(w, z) - \cos(r, z) \cdot \cos(w, x) \right\} \frac{ds}{r^2}, \\ v_z &= \frac{J}{4\pi} \cdot \int_{(L)} \left\{ \cos(r, y) \cdot \cos(w, x) - \cos(r, x) \cdot \cos(w, y) \right\} \frac{ds}{r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (50,2)$$

Ist nun ϑ derjenige Winkel, den die Richtungen der beiden Vektoren $\mathbf{w}$ und $\mathbf{r}$ miteinander einschließen (vgl. Fig. 71), und bedeutet ν^1 die positive Normalenrichtung der von $\mathbf{w}$ und $\mathbf{r}$ aufgespannten Ebene, so müssen auf Grund bekannter Formeln aus der analytischen Geometrie der Geraden die Beziehungen

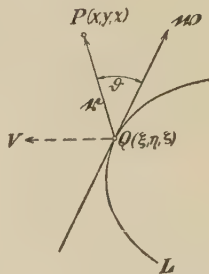


Fig. 71.

$$\left. \begin{aligned} \cos(\nu, x) &= \frac{\cos(r, z) \cdot \cos(w, y) - \cos(r, y) \cdot \cos(w, z)}{\sin \vartheta}, \\ \cos(\nu, y) &= \frac{\cos(r, x) \cdot \cos(w, z) - \cos(r, z) \cdot \cos(w, x)}{\sin \vartheta}, \\ \cos(\nu, z) &= \frac{\cos(r, y) \cdot \cos(w, x) - \cos(r, x) \cdot \cos(w, y)}{\sin \vartheta} \end{aligned} \right\} \quad (50,21)$$

¹⁾ in Fig. 71 versehentlich mit V bezeichnet.

bestehen. Führen wir diese Relationen in (50,2) ein, so ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{J}{4\pi} \cdot \int_{(L)} \frac{\sin \vartheta}{r^2} \cdot \cos(\nu, x) ds, & v_y &= \frac{J}{4\pi} \cdot \int_{(L)} \frac{\sin \vartheta}{r^2} \cdot \cos(\nu, y) ds, \\ v_z &= \frac{J}{4\pi} \cdot \int_{(L)} \frac{\sin \vartheta}{r^2} \cdot \cos(\nu, z) ds, \end{aligned} \right\} \quad (50,3)$$

und so sehen wir also, daß ein im Raumpunkt $Q(\xi, \eta, \zeta)$ lokalisiertes Wirbelfadenelement von der Länge ds in jedem nicht auf L gelegenen Aufpunkt $P(x, y, z)$ einen infinitesimalen Strömungsgeschwindigkeitsbeitrag $d\mathbf{v}$ liefert, dessen Betrag dv durch die positive GröÙe

$$dv = \frac{J}{4\pi} \cdot \frac{\sin \vartheta}{r^2} \cdot ds \quad (50,31)$$

gegeben ist, und dessen Richtung mit der positiven Normalenrichtung der durch die Vektoren $\mathbf{w}$ und $\mathbf{r}$ bestimmten Ebene zusammenfällt. Wegen ihrer formalen Ähnlichkeit mit der bekannten elektrodynamischen Gesetzmäßigkeit, die den Zusammenhang zwischen der Stärke eines elektrischen Stroms und der von ihm in der Umgebung des Leiters hervorgerufenen magnetischen Feldstärke zum Ausdruck bringt, wird diese wichtige Regel auch hier als das *Biot-Savartsche Gesetz* bezeichnet.

Da gemäß (49,41)

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z} = -\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \zeta} \quad (50,32)$$

gesetzt werden darf, so läßt sich (50,1) mit Benutzung der auf L gültigen Relationen

$$\cos(w, x) = \frac{d\xi}{ds}, \quad \cos(w, y) = \frac{d\eta}{ds}, \quad \cos(w, z) = \frac{d\zeta}{ds}$$

in der Form

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{J}{4\pi} \cdot \int_{(L)} \left\{ \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \zeta} d\eta - \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \eta} d\zeta \right\}, \\ v_y &= \frac{J}{4\pi} \cdot \int_{(L)} \left\{ \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \xi} d\zeta - \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \zeta} d\xi \right\}, \\ v_z &= \frac{J}{4\pi} \cdot \int_{(L)} \left\{ \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \eta} d\xi - \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \xi} d\eta \right\} \end{aligned} \right\} \quad (50,4)$$

schreiben. Verstehen wir jetzt unter F ein beliebiges, von der geschlossenen Kurve L berandetes Flächenstück, so können wir den *Stokesschen Integralsatz*

$$\left. \begin{aligned} & \int_{(L)} \{ f_1(\xi, \eta, \zeta) d\xi + f_2(\xi, \eta, \zeta) d\eta + f_3(\xi, \eta, \zeta) d\zeta \} \\ & = \int_{(F)} \left\{ \left(\frac{\partial f_3}{\partial \eta} - \frac{\partial f_2}{\partial \zeta} \right) \cos(n, \xi) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \zeta} - \frac{\partial f_3}{\partial \xi} \right) \cdot \cos(n, \eta) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \xi} - \frac{\partial f_1}{\partial \eta} \right) \cdot \cos(n, \zeta) \right\} d\omega \end{aligned} \right\} (50,41)$$

z. B. auf die erste der drei Gleichungen (50,4) in Anwendung bringen, indem wir

$$f_1(\xi, \eta, \zeta) = 0, \quad f_2(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \zeta}, \quad f_3(\xi, \eta, \zeta) = - \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \eta}$$

wählen. Alsdann wird zunächst

$$\frac{\partial f_3}{\partial \eta} - \frac{\partial f_2}{\partial \zeta} = - \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \zeta^2}$$

oder

$$\frac{\partial f_3}{\partial \eta} - \frac{\partial f_2}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \xi^2},$$

da ja bekanntlich

$$\frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \zeta^2} = 0$$

gilt. Ferner wird

$$\frac{\partial f_1}{\partial \zeta} - \frac{\partial f_3}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \eta \partial \xi}$$

sowie

$$\frac{\partial f_2}{\partial \xi} - \frac{\partial f_1}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \zeta \partial \xi},$$

so daß wir gemäß (50,4) und (50,41) die Beziehung

$$v_x = \frac{J}{4\pi} \cdot \int_{(F)} \left\{ \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \xi^2} \cdot \cos(n, \xi) + \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \eta \partial \xi} \cdot \cos(n, \eta) + \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \zeta \partial \xi} \cdot \cos(n, \zeta) \right\} d\omega \quad (50,42)$$

erhalten. Da nun aber die partiellen Ableitungen der Funktion $\frac{1}{r}$ in Bezug

auf x, y, z bzw. ξ, η, ζ — genau wie $\frac{1}{r}$ selbst — lediglich Funktionen der drei Differenzen $x - \xi, y - \eta, z - \zeta$ darstellen, so gilt in Analogie zu (50,32)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\xi^2} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\xi}\right], & \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\eta\partial\xi} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\eta}\right], \\ \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\zeta\partial\xi} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\zeta}\right],\end{aligned}$$

so daß

$$\begin{aligned}& \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\xi^2} \cdot \cos(n, \xi) + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\eta\partial\xi} \cdot \cos(n, \eta) + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\zeta\partial\xi} \cdot \cos(n, \zeta) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\xi} \cdot \cos(n, \xi) + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\eta} \cdot \cos(n, \eta) + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\zeta} \cdot \cos(n, \zeta)\right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right]\end{aligned}$$

wird. Setzen wir also

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{J}{4\pi} \cdot \int_{(F)} \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\omega, \quad (50,5)$$

so nimmt (50,42) die Form

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad (50,51)$$

an, und in entsprechender Weise läßt sich das Bestehen der Relationen

$$v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \quad \text{und} \quad v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \quad (50,52)$$

beweisen. Die durch einen einzelnen Wirbelfaden in der umgebenden Flüssigkeit erzeugte Bewegung stellt demnach eine Potentialströmung dar, deren Geschwindigkeitspotential $\varphi(x, y, z)$ den in (50,5) verzeichneten Wert besitzt.

Zu einer anschaulichen Deutung von (50,5) werden wir durch Vornahme einer einfachen Umformung geführt. Da nämlich gemäß (50,32) unter Beachtung von (50,11)

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\xi} = \frac{\cos(r, \xi)}{r^2}, \quad \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\eta} = \frac{\cos(r, \eta)}{r^2}, \quad \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\zeta} = \frac{\cos(r, \zeta)}{r^2}$$

gilt, so wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} &= \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\xi} \cdot \cos(n, \xi) + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\eta} \cdot \cos(n, \eta) + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial\zeta} \cdot \cos(n, \zeta) \\ &= \frac{1}{r^2} \cdot \left\{ \cos(r, \xi) \cdot \cos(n, \xi) + \cos(r, \eta) \cdot \cos(n, \eta) + \cos(r, \zeta) \cdot \cos(n, \zeta) \right\} \\ &= \frac{\cos(r, n)}{r^2}, \end{aligned}$$

womit (50,5) in

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{J}{4\pi} \cdot \int_{(F)} \frac{\cos(r, n)}{r^2} d\omega \quad (50,6)$$

übergeht. Nun stellt aber der Ausdruck

$$-\frac{\cos(r, n)}{r^2} d\omega$$

die Größe des räumlichen Winkels dar, unter dem das auf F an der Stelle $Q(\xi, \eta, \zeta)$ lokalisierte Flächenelement mit dem Inhalt $d\omega$ vom Aufpunkt $P(x, y, z)$ aus gesehen wird; denn er bedeutet ja offenbar nichts anderes als den Flächeninhalt desjenigen Teils einer um P als Mittelpunkt gelegten Einheitskugel, der durch den von P als Spitze zur Berandung des Flächenelements führenden Sehstrahlenkegel ausgeschnitten wird. Infolgedessen lehrt (50,6), daß das von einem geschlossenen Wirbelfaden L in einem nicht auf L gelegenen Aufpunkt $P(x, y, z)$ erzeugte Geschwindig-

keitspotential $\varphi(x, y, z)$ der $\frac{J}{4\pi}$ -fachen Größe desjenigen Raumwinkels gleich ist, unter dem ein von L berandetes Flächenstück F im Punkte P erscheint. Beschreibt nun der Aufpunkt P eine geschlossene Raumkurve, die den Wirbelfaden L einmal umschlingt, so muß sich dabei der genannte Raumwinkel bis zur Rückkehr von P in seine Ausgangslage um den Betrag von 4π , mithin das Geschwindigkeitspotential φ um die Größe J ändern. Demnach ist das von einem Wirbelfaden erzeugte Geschwindigkeitspotential $\varphi(x, y, z)$ insofern eine unendlich vieldeutige Ortsfunktion, als sich seine in $P(x, y, z)$ angenommenen Werte um ganzzahlige Vielfache der konstanten

Zirkulationsstärke J des Fadens voneinander unterscheiden. Diese Tatsache steht im vollen Einklang mit den in § 11 gemachten Ausführungen, da ja das Strömungsgebiet durch den geschlossenen Wirbelfaden L , der bei Betrachtung der von ihm hervorgerufenen Potentialströmung auszuschließen ist, zu einem zweifach zusammenhängenden Raumgebiet gestaltet wird.

Besteht eine räumliche Wirbelverteilung aus m diskreten Wirbelfäden L_μ mit den Zirkulationsstärken J_μ ($\mu = 1, 2, \dots, m$), so erhalten wir ein $(m+1)$ -fach zusammenhängendes Strömungsgebiet, in dem die Geschwindigkeitskomponenten v_x , v_y und v_z gemäß (50,3) durch

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{1}{4\pi} \cdot \sum_{\mu=1}^m J_\mu \cdot \int_{(L_\mu)} \frac{\sin \vartheta}{r^2} \cdot \cos(\nu, x) ds, \\ v_y &= \frac{1}{4\pi} \cdot \sum_{\mu=1}^m J_\mu \cdot \int_{(L_\mu)} \frac{\sin \vartheta}{r^2} \cdot \cos(\nu, y) ds, \\ v_z &= \frac{1}{4\pi} \cdot \sum_{\mu=1}^m J_\mu \cdot \int_{(L_\mu)} \frac{\sin \vartheta}{r^2} \cdot \cos(\nu, z) ds \end{aligned} \right\} \quad (50,7)$$

gegeben sind, während das zugehörige Geschwindigkeitspotential $\varphi(x, y, z)$ gemäß (50,5) die Form

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \sum_{\mu=1}^m J_\mu \cdot \int_{(F_\mu)} \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\omega \quad (50,8)$$

annimmt.

Ausdrücklich sei schließlich hervorgehoben, daß unsere Darlegungen insofern eine Lücke aufweisen, als für die von uns behandelten Wirbelbewegungen in einer idealen Flüssigkeit die Führung von mathematischen *Existenzbeweisen* unterblieben ist. In Bezug auf diese Frage sind neuerdings ganz wesentliche Fortschritte durch eine Arbeit von *L. Lichtenstein*¹⁾ erzielt worden, auf deren Inhalt wir uns hier jedoch nicht einlassen können.

§ 51. Wirbelschichten.

Unter einer *Wirbelschicht* ist eine kontinuierliche Verteilung von Wirbelfäden mit infinitesimalen Querschnitten zu verstehen, die sich durch ein Flächenstück S repräsentieren läßt. Denken wir uns nun auf S ein Kurvenstück c gezogen, das, in einem auf der Berandung L_0 von S ge-

¹⁾ *L. Lichtenstein*, Math. Zs. Bd. 23, S. 89 und 310; 1925. Vgl. ferner die weiteren Arbeiten desselben Verfassers in Math. Zs. Bd. 26, S. 196; 1927 sowie Bd. 28, S. 387; 1928.

legenden Punkt Q_0 beginnend, sämtliche durch gewisse Raumkurven L repräsentierten Wirbelfäden der Schicht einmal und nur einmal orthogonal durchsetzt, und dessen vom Anfangspunkt Q_0 aus gezählte Bogenlänge durch σ gemessen werde, so läßt sich jeder zu S gehörende Wirbelfaden L_σ durch einen bestimmten Wert von σ eindeutig kennzeichnen. Dann schneiden die beiden Wirbelfäden L_0 und L_σ aus der Schicht S einen Streifen S_σ heraus (vgl. Fig. 72), dessen Zirkulationsstärke $J(\sigma)$ eine positive Funktion von σ darstellen wird, die wir als stetig und stetig differenzierbar voraussetzen wollen. Demnach gilt also für jede lediglich den Streifen S_σ (und nicht etwa auch noch andere Teile der Wirbelschicht S) umschlingende geschlossene Raumkurve l_σ gemäß (5,61) die Beziehung

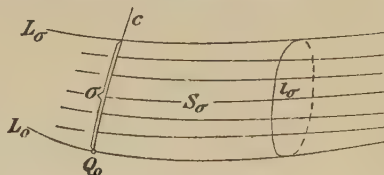


Fig. 72.

$$J(\sigma) = \int_{(l_\sigma)} v_s ds, \quad (51,1)$$

wobei unter v_s die längs l_σ gebildete Tangentialkomponente der Strömungsgeschwindigkeit $\mathbf{v}$ zu verstehen ist. Da sich aber l_σ durch stetige Abänderung in denjenigen Linienzug überführen läßt, der vom Punkte Q_0 aus unmittelbar oberhalb des Streifens S_σ der Kurve c bis zu deren Schnitt mit dem Wirbelfaden L_σ folgt, und der dann von dort aus unmittelbar unterhalb des Streifens S_σ ebenfalls längs c zum Punkte Q_0 zurückgeht, so muß auch

$$J(\sigma) = \int_0^\sigma v_s^{(o)} ds + \int_\sigma^0 v_s^{(u)} ds = \int_0^\sigma \{v_s^{(o)} - v_s^{(u)}\} ds \quad (51,11)$$

sein, falls $v_s^{(o)}$ bzw. $v_s^{(u)}$ die Tangentialkomponenten der Strömungsgeschwindigkeit unmittelbar oberhalb bzw. unmittelbar unterhalb des Streifens S_σ bedeuten. Aus (51,11) ergibt sich dann durch Differentiation die Relation

$$\frac{dJ}{d\sigma} = v_s^{(o)} - v_s^{(u)}, \quad (51,2)$$

derzufolge die Tangentialkomponente der Strömungsgeschwindigkeit beim Durchgang durch die Wirbelschicht eine sprunghafte Änderung erfährt, mithin jede Wirbelschicht eine Unstetigkeitsfläche der Flüssigkeitgeschwindigkeit darstellen muß.

Um jetzt die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit zu berechnen, die durch eine Wirbelschicht S in einem nicht auf S gelegenen Aufpunkt $P(x, y, z)$ hervorgerufen wird, denken wir uns die Schicht S in m aufeinanderfolgende Streifen zerlegt, deren μ -ter durch die beiden Wirbelfäden

$$L_{(\mu-1) \cdot \Delta\sigma} \quad \text{und} \quad L_{\mu \cdot \Delta\sigma} \quad \text{mit} \quad \Delta\sigma = \frac{\sigma_c}{m}$$

begrenzt¹⁾ werde, unter σ_c die Gesamtbogenlänge der oben eingeführten Kurve c verstanden. Die zu diesem μ -ten Streifen gehörende (stets positive) Zirkulationsstärke ΔJ_μ ist dann offenbar durch

$$\Delta J_\mu \doteq |J(\mu \cdot \Delta \sigma) - J(\mu \cdot \Delta \sigma - \Delta \sigma)|$$

gegeben. Da aber auf Grund des ersten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung

$$J(\mu \cdot \Delta \sigma - \Delta \sigma) = J(\mu \cdot \Delta \sigma) - \Delta \sigma \cdot \left(\frac{dJ}{d\sigma} \right)_{\mu^*}$$

gilt, falls $\left(\frac{dJ}{d\sigma} \right)_{\mu^*}$ den Wert der Funktion $\frac{dJ}{d\sigma}$ für ein zwischen $\sigma = (\mu-1) \cdot \Delta \sigma$ und $\sigma = \mu \cdot \Delta \sigma$ gelegenes Argument $\sigma = \sigma_{\mu^*}$ bedeutet, so berechnet sich die Zirkulationsstärke ΔJ_μ des μ -ten Streifens zu

$$\Delta J_\mu = \Delta \sigma \cdot \left| \left(\frac{dJ}{d\sigma} \right)_{\mu^*} \right|.$$

Durch Anwendung von (50,7) auf das aus den m einzelnen Streifen bestehend gedachte Wirbelsystem gelangen wir daher zu den Ausdrücken

$$\begin{aligned} v_x^* &= \frac{1}{4\pi} \cdot \sum_{\mu=1}^m \Delta \sigma \cdot \left| \left(\frac{dJ}{d\sigma} \right)_{\mu^*} \right| \cdot \int_{(L_{\sigma_{\mu^*}})} \frac{\sin \vartheta}{r^2} \cdot \cos(\nu, x) \, ds, \\ v_y^* &= \frac{1}{4\pi} \cdot \sum_{\mu=1}^m \Delta \sigma \cdot \left| \left(\frac{dJ}{d\sigma} \right)_{\mu^*} \right| \cdot \int_{(L_{\sigma_{\mu^*}})} \frac{\sin \vartheta}{r^2} \cdot \cos(\nu, y) \, ds, \\ v_z^* &= \frac{1}{4\pi} \cdot \sum_{\mu=1}^m \Delta \sigma \cdot \left| \left(\frac{dJ}{d\sigma} \right)_{\mu^*} \right| \cdot \int_{(L_{\sigma_{\mu^*}})} \frac{\sin \vartheta}{r^2} \cdot \cos(\nu, z) \, ds, \end{aligned}$$

die augenscheinlich gewisse Näherungswerte der gesuchten Geschwindigkeitskomponenten darstellen müssen. Um hieraus die genauen Werte von v_x , v_y und v_z zu erhalten, haben wir den Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ zu vollziehen, wodurch sich das Gleichungstriplet

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{1}{4\pi} \cdot \int_0^{\sigma_c} \left| \frac{dJ}{d\sigma} \right| d\sigma \int_{(L_\sigma)} \frac{\sin \vartheta}{r^2} \cdot \cos(\nu, x) \, ds, \\ v_y &= \frac{1}{4\pi} \cdot \int_0^{\sigma_c} \left| \frac{dJ}{d\sigma} \right| d\sigma \int_{(L_\sigma)} \frac{\sin \vartheta}{r^2} \cdot \cos(\nu, y) \, ds, \\ v_z &= \frac{1}{4\pi} \cdot \int_0^{\sigma_c} \left| \frac{dJ}{d\sigma} \right| d\sigma \int_{(L_\sigma)} \frac{\sin \vartheta}{r^2} \cdot \cos(\nu, z) \, ds \end{aligned} \right\} (51,3)$$

ergibt.

¹⁾ Diese Bezeichnung entspricht der eingangs getroffenen Vereinbarung, da ja für die beiden den μ -ten Streifen begrenzenden Wirbelfäden $\sigma = (\mu-1) \cdot \Delta \sigma$ bzw. $\sigma = \mu \cdot \Delta \sigma$ gelten muß.

Eine ganz analoge Überlegung führt zur Berechnung des Geschwindigkeitspotentials $\varphi(x, y, z)$, aus dem sich die Geschwindigkeitskomponenten (51,3) durch partielle Differentiationen nach den Koordinaten ableiten lassen. Benutzen wir nämlich wieder die soeben vorgenommene Zerlegung der Wirbelschicht S in m Streifen, so liefert uns Anwendung von (50,8) zunächst den Näherungswert

$$\varphi^*(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \sum_{\mu=1}^m \Delta\sigma \cdot \left| \left(\frac{dJ}{d\sigma} \right)_{\mu^*} \right| \cdot \int_{(F_{\sigma_{\mu}^*})} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} d\omega,$$

der dann durch Vornahme des Grenzübergangs $m \rightarrow \infty$ den gesuchten Wert $\varphi(x, y, z)$ geben muß. Dabei werden wir zweckmäßigerweise als das von $L_{\sigma_{\mu}^*}$ berandete Flächenstück $F_{\sigma_{\mu}^*}$ denjenigen Teil der Schicht S selbst wählen, der aus S durch Abtrennung des Streifens $S_{\sigma_{\mu}^*}$ hervorgeht (vgl. Fig. 73, in der $F_{\sigma_{\mu}^*}$ durch Schraffierung kenntlich gemacht ist). Infolgedessen ist

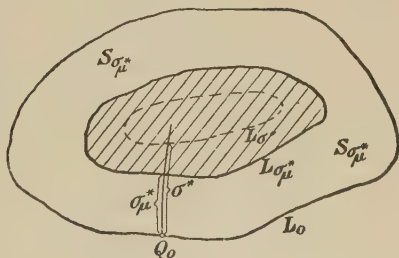


Fig. 73.

$$\int_{(F_{\sigma_{\mu}^*})} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} d\omega = \int_{(S - S_{\sigma_{\mu}^*})} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} d\omega = \int_{\sigma_{\mu}^*}^{\sigma_c} d\sigma^* \int_{(L_{\sigma^*})} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} ds$$

zu setzen, so daß

$$\varphi^*(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \sum_{\mu=1}^m \Delta\sigma \cdot \left| \left(\frac{dJ}{d\sigma} \right)_{\mu^*} \right| \cdot \int_{\sigma_{\mu}^*}^{\sigma_c} d\sigma^* \int_{(L_{\sigma^*})} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} ds$$

wird, woraus für $m \rightarrow \infty$

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \int_0^{\sigma_c} \left| \frac{dJ}{d\sigma} \right| d\sigma \int_{\sigma}^{\sigma_c} d\sigma^* \int_{(L_{\sigma^*})} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} ds$$

oder

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \int_0^{\sigma_c} d\sigma \int_{\sigma}^{\sigma_c} \left| \frac{dJ}{d\sigma} \right| d\sigma^* \int_{(L_{\sigma^*})} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} ds \quad (51,4)$$

folgt. Da aber auf Grund einer bekannten, von *Lejeune-Dirichlet* herührenden Transformationsformel¹⁾

$$\int_0^a dx \int_x^a f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_0^y f(x, y) dx$$

gilt, so wird

$$\int_0^{\sigma_c} d\sigma \int_{\sigma}^{\sigma_c} \left| \frac{dJ}{d\sigma} \right| d\sigma^* = \int_0^{\sigma_c} d\sigma^* \int_0^{\sigma^*} \left| \frac{dJ}{d\sigma} \right| d\sigma$$

oder unter Beachtung der Relation $J(0) = 0$

$$\int_0^{\sigma_c} d\sigma \int_{\sigma}^{\sigma_c} \left| \frac{dJ}{d\sigma} \right| d\sigma^* = \int_0^{\sigma_c} J(\sigma^*) d\sigma^* = \int_0^{\sigma_c} J(\sigma) d\sigma,$$

womit (51,4) in

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \int_0^{\sigma_c} J(\sigma) d\sigma \int_{(L_{\sigma})} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} ds \quad (51,5)$$

übergeht.

§ 52. Geradlinige Wirbelfäden.

Liegt eine den unbegrenzten Raum erfüllende ideale Flüssigkeit vor, in der lediglich geradlinige, sich beiderseits ins Unendliche erstreckende Wirbelfäden vorhanden sind, so wird die resultierende Strömung aus Symmetriegründen in sämtlichen zu den Wirbelfäden senkrechten Ebenen denselben Charakter besitzen müssen. Diese Strömung wird demnach eine zweidimensionale Flüssigkeitsbewegung darstellen, so daß wir uns unter der Voraussetzung, daß die gemeinsame Richtung der Wirbelfäden mit der Richtung der Z -Achse zusammenfällt, auf die Betrachtung der Vorgänge in der XY -Ebene beschränken dürfen. Jeder einzelne Wirbelfaden mit infinitesimalem Querschnitt wird dann durch einen Punkt Q (ξ, η) der Strömungsebene repräsentiert, wobei wir zunächst die Annahme machen wollen, daß die Gesamtheit dieser Punkte ein von einer beschränkten geschlossenen Kurve C_0 berandetes Gebiet B_0 erfüllt. Die Beziehungen (49,1) reduzieren sich wegen $w_x = w_y = 0$ auf die Gleichung

$$2w_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad (52,1)$$

in der unter w_z eine in B_0 von Null verschiedene, hingegen im Außen-

¹⁾ Vgl. z. B. *Serret-Scheffers*, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung Bd. II, Nr. 580, zweites Beispiel.

gebiet B'_0 von C_0 überall verschwindende Funktion von x und y zu verstehen ist, und die Kontinuitätsgleichung (49,13) nimmt die Form

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (52,11)$$

an.

Ist die Funktion w_z in B_0 gegeben, und suchen wir ein Funktionenpaar v_x, v_y so zu bestimmen, daß es die Gleichungen (52,1) und (52,11) befriedigt, so kann dieses Problem höchstens eine Lösung besitzen, falls den gesuchten Funktionen die Grenzbedingungen

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \cdot v_x = \lim_{R \rightarrow \infty} R \cdot v_y = 0$$

mit

$$R^2 = x^2 + y^2$$

auferlegt werden. Dies läßt sich auf durchaus entsprechendem Wege beweisen, wie es in § 49 für das analoge räumliche Problem geschehen ist. Um die Gleichung (52,11) zu erfüllen, genügt offenbar der Ansatz

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (52,2)$$

in dem $\psi(x, y)$ eine vorläufig noch unbekannte Funktion darstellen soll, die gemäß (52,1) der Bedingung

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2w_z \quad (52,3)$$

zu unterwerfen ist. Wird nun

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2} \quad (52,31)$$

gesetzt, wobei unter $Q(\xi, \eta)$ wieder ein in B_0 gelegener Punkt zu verstehen ist, und bedeutet $\varrho(x, y)$ eine in B'_0 überall verschwindende, in B_0 jedoch von Null verschiedene sowie beschränkte und integrable Ortsfunktion, so stellt, wie in der Potentialtheorie¹⁾ bewiesen wird, das durch

$$U(x, y) = \int_{(B_0)} \varrho \cdot \ln \frac{1}{r} d\sigma = \int_{(B_0)} \int_{(B_0)} \varrho(\xi, \eta) \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} d\xi d\eta \quad (52,32)$$

definierte *logarithmische Potential* $U(x, y)$ nebst seinen durch

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \int_{(B_0)} \varrho \cdot \frac{\partial \left(\ln \frac{1}{r} \right)}{\partial x} d\sigma, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \int_{(B_0)} \varrho \cdot \frac{\partial \left(\ln \frac{1}{r} \right)}{\partial y} d\sigma \quad (52,33)$$

gegebenen partiellen Ableitungen erster Ordnung eine in der ganzen

¹⁾ Vgl. etwa W. Sternberg, l. c. I, § 28.

XY -Ebene mit Ausschluß des unendlich fernen Punktes überall stetige Ortsfunktion dar, die in allen nicht auf der Berandung C_0 von B_0 befindlichen Aufpunkten $P(x, y)$ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2\pi \cdot \varrho(x, y)$$

genügt. Infolgedessen ist zur Erfüllung von (52,3) in Analogie zu (52,32)

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{(B_0)} w_z \cdot \ln \frac{1}{r} d\sigma \quad (52,4)$$

zu setzen, woraus sich wegen (52,33) gemäß (52,2)

$$v_x = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{(B_0)} w_z \cdot \frac{\partial \left(\ln \frac{1}{r} \right)}{\partial y} d\sigma, \quad v_y = -\frac{1}{\pi} \cdot \int_{(B_0)} w_z \cdot \frac{\partial \left(\ln \frac{1}{r} \right)}{\partial x} d\sigma \quad (52,5)$$

ergibt.

Vergleicht man (52,2) mit (17,9), so sieht man, daß die gemäß (52,4) aus der gegebenen Wirbelverteilung zu berechnende Funktion $\psi(x, y)$ die *Stromfunktion* der durch (52,5) beschriebenen ebenen Potentialströmung darstellt. Das zugehörige *Geschwindigkeitspotential* $\varphi(x, y)$ kann demnach durch Integration der *Cauchy-Riemannschen* Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (52,51)$$

mit Hilfe von $\psi(x, y)$ ermittelt werden.

Die vorstehenden Ergebnisse wollen wir nunmehr zunächst auf den Fall eines einzelnen geradlinigen Wirbelfadens mit infinitesimalem Querschnitt anwenden, der durch den Nullpunkt $\xi = \eta = 0$ der Strömungsebene repräsentiert werde. Dann schrumpft das ebene Gebiet B_0 auf eine unbegrenzt kleine Umgebung des Nullpunkts mit dem Flächeninhalt ω zusammen, in der der in (52,4) auftretende Integrand als eine Konstante anzusehen ist. Unter Beachtung von (52,31) erhalten wir demnach gemäß (52,4)

$$\psi(x, y) = \frac{1}{\pi} \cdot w_z \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \int_{(B_0)} d\sigma = \frac{1}{\pi} \cdot \omega \cdot w_z \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

oder

$$\psi(x, y) = -\frac{1}{\pi} \cdot \omega \cdot w_z \cdot \ln \sqrt{x^2 + y^2},$$

wofür wir kürzer

$$\psi(x, y) = -\frac{J}{2\pi} \cdot \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad (52,6)$$

schreiben wollen, indem wir die durch

$$J = 2\omega w_z \quad (52,61)$$

definierte *Zirkulationsstärke* J des geradlinigen Wirbelfadens einführen. Diese Definition von J ist natürlich in Analogie zu (48,3) gebildet worden, allein mit dem wesentlichen Unterschied, daß die rechte Seite von (48,3) nur positive Faktoren — nämlich neben dem Flächeninhalt ω des Fadenquerschnitts den (stets positiven) Betrag w des Winkelgeschwindigkeitsvektors $\mathbf{w}$ — enthält, während in (52,61) die Größe w_z auftritt, die augenscheinlich dann und nur dann positiv ausfällt, falls der auf der XY -Ebene senkrecht stehende Vektor $\mathbf{w}$ in die positive Richtung der Z -Achse weist.

Zur Berechnung des zu (52,6) gehörigen Geschwindigkeitspotentials $\varphi(x, y)$ erübrigt sich die Benutzung der Gleichungen (52,51), da man wohl unmittelbar sieht, daß (52,6) den Imaginärteil der analytischen Funktion

$$\frac{J}{2\pi i} \cdot \ln z = \frac{J}{2\pi i} \cdot \ln(x + iy) = \frac{J}{2\pi i} \cdot \ln\left(\sqrt{x^2 + y^2} \cdot e^{i \cdot \arctan \frac{y}{x}}\right)$$

darstellt. Tatsächlich wird ja

$$\frac{J}{2\pi i} \cdot \ln z = \frac{J}{2\pi i} \cdot \left\{ \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \cdot \arctan \frac{y}{x} \right\} = \frac{J}{2\pi} \cdot \arctan \frac{y}{x} - \frac{J \cdot i}{2\pi} \cdot \ln \sqrt{x^2 + y^2},$$

woraus für die zu (52,6) konjugierte Potentialfunktion $\varphi(x, y)$ sofort der Ausdruck

$$\varphi(x, y) = \frac{J}{2\pi} \cdot \arctan \frac{y}{x} \quad (52,7)$$

zu entnehmen ist. Die Stromlinien

$$\psi(x, y) = \text{const.}$$

sind wegen (52,6) durch

$$x^2 + y^2 = \text{const.}$$

gegeben; sie fallen also mit der Schar der um den Nullpunkt als Mittelpunkt gelegten Kreise k der Strömungsebene zusammen. Die beiden Geschwindigkeitskomponenten v_x und v_y berechnen sich gemäß (52,7) zu

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{J}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}, \\ v_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{J}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2}, \end{aligned} \right\} \quad (52,71)$$

so daß schließlich für den Betrag v der Strömungsgeschwindigkeit

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \frac{J^2}{4\pi^2} \cdot \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

oder

$$v = \frac{|J|}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (52,72)$$

gilt. Mit Einführung von Polarkoordinaten r und Θ durch die Substitutionen

$$x = r \cdot \cos \Theta, \quad y = r \cdot \sin \Theta$$

wird gemäß (52,71)

$$v_x = - \frac{J \cdot \sin \Theta}{2\pi r}, \quad v_y = \frac{J \cdot \cos \Theta}{2\pi r},$$

mithin

$$\begin{aligned} \int_{(k)} (v_x dx + v_y dy) &= \int_0^{2\pi} \left(v_x \cdot \frac{dx}{d\Theta} + v_y \cdot \frac{dy}{d\Theta} \right) d\Theta \\ &= \frac{J}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (\sin^2 \Theta + \cos^2 \Theta) d\Theta = J, \end{aligned}$$

womit die Übereinstimmung der beiden in (17,62) und (52,61) gegebenen Definitionen von J — insbesondere auch hinsichtlich des Vorzeichens! — dargelegt ist.

Liegt ferner ein System von m diskreten geradlinigen Wirbelfäden mit den positiven oder negativen Zirkulationsstärken J_μ ($\mu = 1, 2, \dots, m$) vor, das durch die Punkte $Q_\mu(\xi_\mu, \eta_\mu)$ der XY -Ebene repräsentiert wird, so verallgemeinert sich (52,7) zu

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{\mu=1}^m J_\mu \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y - \eta_\mu}{x - \xi_\mu}. \quad (52,8)$$

Hieraus läßt sich dann leicht das Geschwindigkeitspotential derjenigen zweidimensionalen Strömung ermitteln, die eine *ebene Wirbelschicht* in der XY -Ebene hervorruft. Als Repräsentanten einer solchen Schicht G , deren einzelne Wirbelfäden L natürlich einen gewissen geradlinig begrenzten, zur Z -Achse parallelen Streifen der XZ -Ebene erfüllen, werden wir eine Strecke g der XY -Ebene anzusehen haben, als welche wir unbeschadet der Allgemeinheit die auf der Y -Achse symmetrisch zum Nullpunkt gelegene Strecke

$$-\frac{l}{2} \leq \eta \leq +\frac{l}{2} \quad (52,81)$$

von der Länge l wählen können. In Analogie zu (51,1) ist die Zirkulationsstärke $J(\eta)$ von G durch den Ansatz

$$J(\eta) = \int_{(G_\eta)} v_s ds$$

zu definieren, wobei unter C_η eine beschränkte geschlossene Kurve der XY -Ebene zu verstehen ist, die lediglich dasjenige Stück von g umschließt,

das durch die Ordinaten $-\frac{l}{2}$ und η be-

grenzt wird (vgl. Fig. 74). Setzen wir nun $J(\eta)$ als eine stetige und stetig differenzierbare Funktion von η voraus, und denken wir uns die Strecke

g zunächst in die beiden Teile g_1 $\left(-\frac{l}{2} \leq \eta \leq 0\right)$ und g_2 $\left(0 \leq \eta \leq +\frac{l}{2}\right)$ sowie diese wiederum in je m aufeinander folgende Stückchen $g_1^{(\mu)}$ bzw. $g_2^{(\mu)}$

von der Länge $\Delta\eta = \frac{l}{2m}$ zerlegt, so ist

die zu $g_1^{(\mu)}$ gehörige Zirkulationsstärke $\Delta J_1^{(\mu)}$ durch

$$\Delta J_1^{(\mu)} = J\left(-\frac{l}{2} + \mu \cdot \Delta\eta\right) - J\left(-\frac{l}{2} + \mu \cdot \Delta\eta - \Delta\eta\right)$$

gegeben, wofür wir auf Grund des ersten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung auch

$$\Delta J_1^{(\mu)} = \Delta\eta \cdot \left(\frac{dJ}{d\eta}\right)_1^{(\mu^*)}$$

schreiben dürfen, unter $\left(\frac{dJ}{d\eta}\right)_1^{(\mu^*)}$ den Wert der stetigen Funktion $\frac{dJ}{d\eta}$ an einer gewissen, auf $g_1^{(\mu)}$ gelegenen Stelle $\eta_1^{(\mu^*)}$ verstanden. Mit Benutzung einer entsprechenden Symbolik ergibt sich die zu $g_2^{(\mu)}$ gehörige Zirkulationsstärke $\Delta J_2^{(\mu)}$ zu

$$\Delta J_2^{(\mu)} = \Delta\eta \cdot \left(\frac{dJ}{d\eta}\right)_2^{(\mu^*)},$$

so daß Anwendung von (52,8) auf das aus sämtlichen $g_1^{(\mu)}$ und $g_2^{(\mu)}$ bestehend gedachte ebene Wirbelsystem ein Geschwindigkeitspotential von der Form

$$\varphi^*(x, y) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{\mu=1}^m \left\{ \left(\frac{dJ}{d\eta}\right)_1^{(\mu^*)} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y - \eta_1^{(\mu^*)}}{x} + \left(\frac{dJ}{d\eta}\right)_2^{(\mu^*)} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y - \eta_2^{(\mu^*)}}{x} \right\} \cdot \Delta\eta$$

liefert, das für $m \rightarrow \infty$ in das gesuchte Geschwindigkeitspotential

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ}{d\eta} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y - \eta}{x} d\eta \quad (52,9)$$

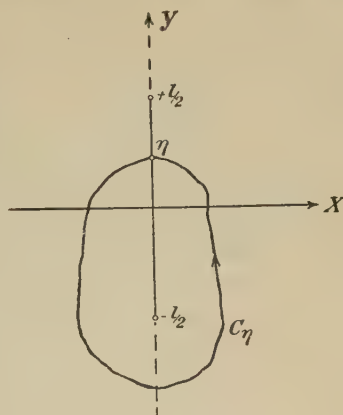


Fig. 74.

der ebenen Wirbelschicht G übergeht. Da somit $\frac{dJ}{d\eta} d\eta$ die Zirkulationsstärke an der Stelle η der Schicht G passierenden geradlinigen Wirbelfadens L_η darstellt, so wird die positive Richtung des zugehörigen Winkelgeschwindigkeitsvektors $\mathbf{w}$ mit der positiven bzw. negativen Richtung der Z -Achse übereinstimmen, je nachdem die Funktion $\frac{dJ}{d\eta}$ an der Stelle η einen positiven oder aber einen negativen Wert besitzt.

Eine sehr bemerkenswerte Form nimmt hier die Relation (51,2) an, die die Unstetigkeit der Tangentialkomponente der Strömungsgeschwindigkeit beim Durchgang durch eine Wirbelschicht zum Ausdruck bringt. Da nämlich für unsere ebene Wirbelschicht

$$v_s^{(o)} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \varphi(+0, y) \right\}, \quad v_s^{(u)} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \varphi(-0, y) \right\}$$

mit

$$\varphi(+0, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(+\varepsilon, y), \quad \varphi(-0, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varphi(-\varepsilon, y)$$

zu setzen ist, und da gemäß (52,9)

$$\varphi(-\varepsilon, y) = -\varphi(+\varepsilon, y) \quad (52,91)$$

gilt, so liefert (51,2) die Beziehung

$$\frac{dJ}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \varphi(+0, y) - \varphi(-0, y) \right\} = 2 \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \varphi(+0, y) \right\},$$

aus der wegen

$$\int_{-l/2}^y \frac{dJ}{dy} dy = J(y) - J\left(-\frac{l}{2}\right) = J(y)$$

sofort

$$J(y) = 2 \cdot \varphi(+0, y) \quad (52,92)$$

folgt.

Siebentes Kapitel.

Die Prandtl'sche Tragflügeltheorie.

§ 53. Das Wirbelband einer Tragfläche von endlicher Spannweite.

Der in der Einleitung hervorgehobenen Erfahrungstatsache, daß eine die Luft durchfliegende Flugzeugtragfläche sowohl Auftrieb als auch Widerstand erleidet, ist die im vierten Kapitel auf Grund der in § 16 mitgeteilten Überlegungen von uns entwickelte hydrodynamische Theorie der ebenen wirbelfrei erfolgenden Profilstömungen nur in sehr beschränktem Umfang gerecht geworden. Denn einmal basiert diese Theorie auf der praktisch nicht zu realisierenden Begriffsbildung eines beiderseits unbegrenzt ausgedehnten Flügels, und überdies führt sie zu dem paradoxen Ergebnis, daß die resultierende Luftkraft ein reiner Auftrieb ist, mithin die Flugbewegung ohne jeglichen Widerstand vor sich geht. Nichtsdestoweniger wird uns jetzt die ebene Theorie die Möglichkeit bieten, durch sinngemäße Erweiterung unserer Betrachtungen eine bessere Übereinstimmung mit der Erfahrung zu erzielen, wobei wir allerdings mit Rücksicht auf den heutigen Stand unserer Kenntnisse den bisher ausschließlich beschrittenen Weg der streng mathematischen Deduktion verlassen und eine mehr heuristisch orientierte Methode zur Anwendung bringen müssen.

Als notwendige und hinreichende Bedingung für das Vorhandensein von Auftrieb hat die Theorie der unendlich breiten Tragfläche die Annahme einer positiven, von Null verschiedenen Zirkulationskonstanten J ergeben, die in mathematischer Hinsicht wegen des zweifachen Zusammenhangs des Strömungsgebiets durchaus gerechtfertigt erscheint, wenngleich ihre physikalische Deutung einstweilen unerledigt geblieben ist. Alsdann tritt z. B. für den Fall einer kreisförmig berandeten Profilkontur, deren Mittelpunkt im Koordinatenanfangspunkt der XY -Ebene gelegen ist, zum Geschwindigkeitspotential der einfachen Ausweichströmung gemäß (30,1) ein additives Glied von der Form

$$+ \frac{J}{2\pi} \cdot \text{arc tg } \frac{y}{x}$$

hinzu, welcher Ausdruck aber gemäß (52,7) mit dem Geschwindigkeitspotential derjenigen Strömung identisch ist, die ein unbegrenzt ausgedehnter, längs der Z -Achse sich erstreckender Wirbelfaden von infinitesimalem Querschnitt mit der Zirkulationsstärke J in der XY -Ebene hervorrufen würde. Infolgedessen liegt wohl der Gedanke nahe, jede beliebig berandete, beiderseits unbegrenzt ausgedehnte Tragfläche durch ein geeignet gewähltes System von Wirbelfäden mit positiven Zirkulationsstärken zu ersetzen, auf dessen Wirkung sich dann das Zustandekommen des von J abhängigen Bestandteils des zugehörigen, in (31,9) verzeichneten ebenen Geschwindigkeitspotentials zurückführen ließe. Dieses

Wirbelsystem wäre dann nicht nach Art von wirklichen Flüssigkeitswirbeln ungehindert beweglich, sondern ihm würde durch die Bedingung, in der angegebenen Weise die Tragfläche vertreten zu sollen, sein fester Platz in der Strömung angewiesen. Man pflegt hier daher von *gebundenen Wirbeln* zu sprechen, im Unterschied zu den *frei* beweglichen Flüssigkeitswirbeln, mit denen sie jedoch in jeder anderen Hinsicht durchaus dieselben Eigenschaften gemeinsam haben.

Wenn wir demnach jetzt versuchen wollen, durch Führung von zwei Parallelschnitten den Übergang vom unendlich breiten Flügel zum Flügel von endlicher Spannweite zu vollziehen, so dürfen wir dabei nicht etwa auch das System der gebundenen Ersatzwirbel durchschneiden, da ja lediglich geschlossene oder beiderseits sich ins Unendliche erstreckende Wirbelfäden möglich sind. Vielmehr müßten wir annehmen, daß an den beiden gedachten Schnittflächen die den Flügel repräsentierenden gebundenen Wirbelfäden in freie Wirbel übergehen, die bei ihrem Austritt in die Flüssigkeit durch die Grundströmung¹⁾ nach hinten abgebogen und ins Unendliche fortgeführt würden. Hierbei entsteht jedoch die Schwierigkeit, daß solche Wirbelfäden mit endlicher Zirkulationsstärke ein Geschwindigkeitsfeld von unbegrenzt großer kinetischer Energie erzeugen müßten, was nach dem Gesetz von der Erhaltung der Energie mit dem Auftreten eines endlichen Tragflächenwiderstandes unvereinbar ist. *Infolgedessen lassen wir fortan die bisher stets getroffene Voraussetzung einer längs der ganzen Tragflügelspannweite konstanten Zirkulation J fallen, und postulieren zunächst die Existenz einer besonderen Zirkulationsverteilung derart, daß die Zirkulation in der Tragflächenmitte einen größten positiven Wert besitzt, von dort aus nach beiden Seiten in symmetrisch-stetiger Weise abnimmt und an den Tragflächenenden den Wert Null erreicht.* Denken wir uns demnach eine geschlossene Kurve L über den Tragflügel hinweggezogen, so wird sich dabei die Zirkulation längs L beständig ändern müssen, so daß unser erstes Postulat auf Grund des am Schluß von § 48 formulierten Satzes zu der Folgerung führt, daß jeder Punkt der Flügelhinterkante als Austrittsstelle eines freien Wirbelfadens mit infinitesimaler Zirkulationsstärke fungieren muß. Die Gesamtheit dieser Wirbelfäden wird sich dann in die Richtung der nach hinten abfließenden Grundströmung einstellen und eine gewisse *Wirbelschicht* bilden, deren Verhalten natürlich streng genommen aus der wechselseitigen Beeinflussung der einzelnen Wirbelfäden zu erschließen wäre. Ein solches Vorgehen wird jedoch wegen unüberwindlicher mathematischer Schwierigkeiten unmöglich gemacht. Wir sehen daher, um weiter zu kommen, von der Eigenbewegung der Wirbelfäden völlig ab und gelangen dadurch zu der zweiten Annahme, daß die scharfe Hinterkante jedes Flugzeugtragflügels von endlicher Spannweite als Ursprung eines ebenen, von der Strömung nach hinten fortgetragenen *Wirbelbandes* anzusehen ist,

¹⁾ d. h. die auf S. 46 erwähnte ungestörte Parallelströmung.

das sich aus unbegrenzt vielen, zur Flügelmitte symmetrisch gelegenen, hufeisenförmigen Wirbelringen zusammensetzt, die sich im Flügelinneren durch Vermittelung von gebundenen Wirbelfäden schließen, während sie sich in der Flüssigkeit in Richtung der Grundströmung bis ins Unendliche erstrecken. Alsdann wollen wir schließlich noch eine letzte Vereinfachung vornehmen, die darin besteht, daß wir die genaue räumliche Verteilung der gebundenen Wirbel unberücksichtigt lassen. Vielmehr wollen wir den Flügel als eine *tragende Linie* behandeln, d. h. als einen einzigen gebundenen Wirbelfaden, dessen positive Zirkulationsstärke von Ort zu Ort derart variiert, daß sie in jedem Fadenquerschnitt der Summe der Zirkulationsstärken aller derjenigen Komponenten des ursprünglichen gebundenen Wirbelsystems gleich wird, die den entsprechenden Flügelquerschnitt durchsetzen würden.

Die Annahme, daß sich von der Hinterkante einer Tragfläche ein Wirbelband ablöst, ist gemäß § 51 mit der Vorstellung identisch, daß hinter dem Flügel eine *ebene Unstetigkeitsfläche der Flüssigkeitsgeschwindigkeit* zur Ausbildung gelangt. Zu dieser Vorstellung werden wir aber auch unmittelbar durch Berücksichtigung des Umstandes geführt, daß notwendigerweise bei Vorhandensein von Auftrieb unterhalb der Tragfläche ein Überdruck, oberhalb der Tragfläche hingegen ein Unterdruck herrschen muß. Da sich nämlich ein derartiges Druckgefälle durch eine geeignete Bewegung der Flüssigkeit auszugleichen suchen wird, so muß an den beiden seitlichen Flügelenden eine quer gerichtete Umströmung der Ränder einsetzen, die sich der nach hinten gerichteten Grundströmung durch geometrische Addition der entsprechenden Geschwindigkeiten überlagern wird. Wenn daher die oben bzw. unten mit der Tragfläche in Berührung gewesenen Luftschichten an der scharfen Hinterkante des Flügels wieder zusammenfließen, so werden ihre Horizontalgeschwindigkeiten in der Berührungsfläche nicht mehr miteinander übereinstimmen, sondern eine gewisse, durch die zusätzliche Querströmung bedingte Differenz besitzen, womit eben die erwähnte Unstetigkeitsfläche der Geschwindigkeit in Erscheinung tritt.

Wie zu Beginn von § 47 dargelegt wurde, ist die Entstehung von Wirbeln in einer idealen Flüssigkeit in theoretischer Hinsicht als unmöglich zu bezeichnen. Wenn demnach auch unsere Theorie von dem Zustandekommen des Wirbelbandes einer Tragfläche von endlicher Spannweite keine Rechenschaft abzulegen vermag, so wird sie uns doch bei Voraussetzung der Existenz eines solchen Gebildes zu Auftriebs- und Widerstandsformeln führen, die sich in guter Übereinstimmung mit den Erfahrungstatsachen befinden. Der Urheber dieser Formeln ist der Göttinger Aerodynamiker *L. Prandtl*¹⁾, weshalb man die Theorie der Tragfläche von endlicher Spannweite als die *Prandtl'sche Tragflügeltheorie* zu bezeichnen pflegt.

¹⁾ *L. Prandtl*, Nachr. v. d. kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, math. phys. Kl. Jg. 1918, S. 151 und Jg. 1919, S. 107.

§ 54. Das Geschwindigkeitsfeld des Wirbelbandes.

Das durch das zweite Postulat des vorhergehenden Paragraphen eingeführte Wirbelband wird in der Flüssigkeit ein gewisses stationäres Geschwindigkeitsfeld hervorrufen, das wir nunmehr näher untersuchen wollen. Zu diesem Zweck verlegen wir den Nullpunkt eines mit dem Flügel fest verbundenen rechtwinkligen Bezugssystems in den Mittelpunkt O

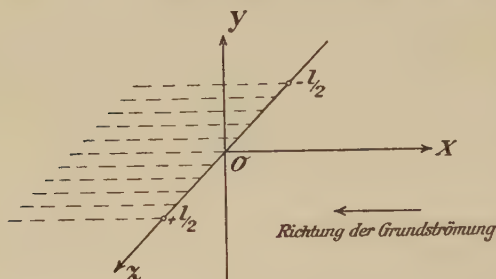


Fig. 75.

der den Flügel repräsentierenden tragenden Linie von der Länge l , und lassen die drei Koordinatenachsen in der aus Fig. 75 ersichtlichen Weise verlaufen. Um ferner die in § 51 gewonnenen Ergebnisse verwerten zu können, denken wir uns zunächst das in der negativen Richtung der X -Achse sich ins Unendliche erstreckende Wirbelband durch

einen parallel zur YZ -Ebene im Abstände x_0 vom Ursprung O geführten Schnitt in eine beschränkte ebene Wirbelschicht verwandelt, wobei natürlich die beiden abgeschnittenen Enden jedes einzelnen hufeisenförmigen Wirbelfadens L des Bandes durch längs der Schnittgeraden angeordnete Fadenstücke miteinander zu verbinden sind, und wobei die positive Richtung des Winkelgeschwindigkeitsvektors ω längs L durch die Bedingung eindeutig festgelegt ist, daß sie an der tragenden Linie gemäß den im vorhergehenden Paragraphen gemachten Ausführungen mit der positiven Richtung der Z -Achse zusammenfallen muß (vgl. Fig. 76, in der die eingezeichneten Pfeile die positive Richtung von ω andeuten). Als das in § 51 benutzte Kurvenstück c können wir dann offenbar denjenigen Teil der Z -Achse ansehen, der

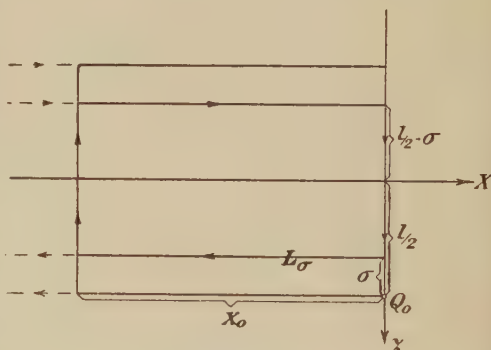


Fig. 76.

durch die beiden auf ihr liegenden Punkte mit den Koordinaten $+\frac{l}{2}$ und 0 begrenzt wird, so daß jetzt $\sigma_c = \frac{l}{2}$ zu setzen ist. Infolgedessen berechnen sich die Geschwindigkeitskomponenten $v_x^{(0)}(x, y, z)$, $v_y^{(0)}(x, y, z)$, $v_z^{(0)}(x, y, z)$ derjenigen Strömung, die von der durch x_0 gekennzeichneten

beschränkten ebenen Wirbelschicht in einem Aufpunkt $P(x, y, z)$ des Raumes hervorgerufen wird, gemäß (51,3) zu

$$\left. \begin{aligned} v_x^{(0)}(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \cdot \int_0^{l/2} \left| \frac{dJ}{d\sigma} \right| d\sigma \int_{(L_\sigma)} \frac{\sin \vartheta}{r^2} \cdot \cos(\nu, x) ds, \\ v_y^{(0)}(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \cdot \int_0^{l/2} \left| \frac{dJ}{d\sigma} \right| d\sigma \int_{(L_\sigma)} \frac{\sin \vartheta}{r^2} \cdot \cos(\nu, y) ds, \\ v_z^{(0)}(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi} \cdot \int_0^{l/2} \left| \frac{dJ}{d\sigma} \right| d\sigma \int_{(L_\sigma)} \frac{\sin \vartheta}{r^2} \cdot \cos(\nu, z) ds, \end{aligned} \right\} \quad (54,1)$$

wobei, da die Wirbelschicht in der XZ -Ebene liegt, gemäß (49,41)

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2 + (z - \zeta)^2} \quad (54,11)$$

gilt, und wobei unter ϑ der von den beiden Vektoren $\mathbf{w}$ und $\mathbf{r}$ eingeschlossene Winkel sowie unter ν die positive Normalenrichtung der von $\mathbf{w}$ und $\mathbf{r}$ aufgespannten Ebene zu verstehen ist. Für die durch das vollständige Wirbelband der Tragfläche erzeugten Geschwindigkeitskomponenten $v_x(x, y, z)$, $v_y(x, y, z)$, $v_z(x, y, z)$ ergibt sich sodann

$$\left. \begin{aligned} v_x(x, y, z) &= \lim_{x_0 \rightarrow \infty} v_x^{(0)}(x, y, z), \\ v_y(x, y, z) &= \lim_{x_0 \rightarrow \infty} v_y^{(0)}(x, y, z), \\ v_z(x, y, z) &= \lim_{x_0 \rightarrow \infty} v_z^{(0)}(x, y, z), \end{aligned} \right\} \quad (54,2)$$

und das zugehörige Geschwindigkeitspotential $\varphi(x, y, z)$ ist in entsprechender Weise gemäß (51,5) durch

$$\varphi(x, y, z) = \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \varphi_0(x, y, z) \quad (54,21)$$

mit

$$\varphi_0(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \int_0^{l/2} J(\sigma) d\sigma \int_{(L_\sigma)} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y} ds \quad (54,22)$$

gegeben, da ja die positive Normalenrichtung n des Wirbelbandes infolge des durch den Vektor $\mathbf{w}$ bewirkten Umlaufsinns mit der negativen Richtung der Y -Achse übereinstimmen, mithin auf ihm

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} = -\frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial \eta} = \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y}$$

gesetzt werden muß.

zu setzen ist, so wird

$$\begin{aligned}
 \int_{(L_\sigma)} \frac{\sin \vartheta}{r^2} \cdot \cos(\nu, x) ds &= - \int_{-\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)}^{-\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)} \frac{y}{[(x+x_0)^2 + y^2 + (z-\zeta)^2]^{3/2}} d\zeta \\
 &\quad + \int_{\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)}^{\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)} \frac{y}{[x^2 + y^2 + (z-\zeta)^2]^{3/2}} d\zeta, \\
 \int_{(L_\sigma)} \frac{\sin \vartheta}{r^2} \cdot \cos(\nu, y) ds &= - \int_0^{-x_0} \frac{z - \left(\frac{l}{2} - \sigma\right)}{\left[(x-\xi)^2 + y^2 + \left\{z - \left(\frac{l}{2} - \sigma\right)\right\}^2\right]^{3/2}} d\xi \\
 &\quad - \int_{\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)}^{\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)} \frac{x+x_0}{[(x+x_0)^2 + y^2 + (z-\zeta)^2]^{3/2}} d\zeta \\
 &\quad + \int_{\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)}^{\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)} \frac{z + \left(\frac{l}{2} - \sigma\right)}{\left[(x-\xi)^2 + y^2 + \left\{z + \left(\frac{l}{2} - \sigma\right)\right\}^2\right]^{3/2}} d\xi \\
 &\quad + \int_{\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)}^{\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)} \frac{x}{[x^2 + y^2 + (z-\zeta)^2]^{3/2}} d\zeta, \\
 \int_{(L_\sigma)} \frac{\sin \vartheta}{r^2} \cdot \cos(\nu, z) ds &= \int_0^{-x_0} \frac{y}{\left[(x-\xi)^2 + y^2 + \left\{z - \left(\frac{l}{2} - \sigma\right)\right\}^2\right]^{3/2}} d\xi \\
 &\quad + \int_{-x_0}^0 \frac{y}{\left[(x-\xi)^2 + y^2 + \left\{z + \left(\frac{l}{2} - \sigma\right)\right\}^2\right]^{3/2}} d\xi.
 \end{aligned}$$

Wegen

$$\int \frac{ds}{[(a-s)^2 + b]^{3/2}} = -\frac{1}{b} \cdot \frac{a-s}{\sqrt{(a-s)^2 + b}}$$

ergibt sich hieraus

$$\int_{(L_\sigma)} \frac{\sin \vartheta}{r^2} \cdot \cos(\nu, x) ds =$$

$$\frac{y}{(x+x_0)^2+y^2} \cdot \left[\frac{z+\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)}{\sqrt{(x+x_0)^2+y^2+\left\{z+\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)\right\}^2}} - \frac{z-\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)}{\sqrt{(x+x_0)^2+y^2+\left\{z-\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)\right\}^2}} \right]$$

$$+ \frac{y}{x^2+y^2} \cdot \left[\frac{z-\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)}{\sqrt{x^2+y^2+\left\{z-\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)\right\}^2}} - \frac{z+\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)}{\sqrt{x^2+y^2+\left\{z+\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)\right\}^2}} \right],$$

$$\int_{(L_\sigma)} \frac{\sin \vartheta}{r^2} \cdot \cos(\nu, y) ds =$$

$$\frac{z-\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)}{y^2+\left\{z-\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)\right\}^2} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{y^2+\left\{z-\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)\right\}^2}{(x+x_0)^2}}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+\left\{z-\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)\right\}^2}} \right]$$

$$- \frac{1}{(x+x_0)^2+y^2} \cdot \left[\frac{z+\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)}{\sqrt{1+\frac{y^2+\left\{z+\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)\right\}^2}{(x+x_0)^2}}} - \frac{z-\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)}{\sqrt{1+\frac{y^2+\left\{z-\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)\right\}^2}{(x+x_0)^2}}} \right]$$

$$+ \frac{z+\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)}{y^2+\left\{z+\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)\right\}^2} \cdot \left[\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+\left\{z+\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)\right\}^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{y^2+\left\{z+\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)\right\}^2}{(x+x_0)^2}}} \right]$$

$$- \frac{x}{x^2+y^2} \cdot \left[\frac{z-\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)}{\sqrt{x^2+y^2+\left\{z-\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)\right\}^2}} - \frac{z+\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)}{\sqrt{x^2+y^2+\left\{z+\left(\frac{l}{2}-\sigma\right)\right\}^2}} \right],$$

$$\int_{(L_\sigma)} \frac{\sin \vartheta}{r^2} \cdot \cos(\nu, z) ds =$$

$$-\frac{y}{y^2 + \left\{ z - \left(\frac{l}{2} - \sigma \right) \right\}^2} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{y^2 + \left\{ z - \left(\frac{l}{2} - \sigma \right) \right\}^2}{(x+x_0)^2}}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + \left\{ z - \left(\frac{l}{2} - \sigma \right) \right\}^2}} \right]$$

$$-\frac{y}{y^2 + \left\{ z + \left(\frac{l}{2} - \sigma \right) \right\}^2} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + \left\{ z + \left(\frac{l}{2} - \sigma \right) \right\}^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{y^2 + \left\{ z + \left(\frac{l}{2} - \sigma \right) \right\}^2}{(x+x_0)^2}}} \right],$$

und wenn man diese Werte in (54,1) einträgt, so erhält man gemäß (54,2) z. B.

$$v_x(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \int_0^{l/2} \left| \frac{dJ}{d\sigma} \right| \cdot \frac{z - \left(\frac{l}{2} - \sigma \right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + \left\{ z - \left(\frac{l}{2} - \sigma \right) \right\}^2}} d\sigma$$

$$- \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \int_0^{l/2} \left| \frac{dJ}{d\sigma} \right| \cdot \frac{z + \left(\frac{l}{2} - \sigma \right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + \left\{ z + \left(\frac{l}{2} - \sigma \right) \right\}^2}} d\sigma.$$

Formt man hierin das erste Integral durch die Substitution $\frac{l}{2} - \sigma = \zeta$, das zweite Integral durch die Substitution $\frac{l}{2} - \sigma = -\zeta$ um, so wird

$$v_x(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \int_{+l/2}^0 \left| \frac{dJ}{d\zeta} \right| \cdot \frac{z - \zeta}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2}} d\zeta \left. \vphantom{\int_{+l/2}^0} \right\} \quad (54,23)$$

$$- \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \int_{-l/2}^0 \left| \frac{dJ}{d\zeta} \right| \cdot \frac{z - \zeta}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2}} d\zeta.$$

Da aber auf Grund des im vorhergehenden Paragraphen aufgestellten ersten Postulats

$$J\left(-\frac{l}{2}\right) = J\left(+\frac{l}{2}\right) = 0 \quad (54,3)$$

sowie

$$\frac{dJ}{d\zeta} \left\{ \begin{array}{ll} > 0 \text{ für } -\frac{l}{2} \leq \zeta < 0, \\ = 0 \text{ für } \zeta = 0, \\ < 0 \text{ für } 0 < \zeta \leq +\frac{l}{2} \end{array} \right\} \quad (54,31)$$

gilt, so kann

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left| \frac{dJ}{d\zeta} \right| = \frac{dJ}{d\zeta} & \text{für } -\frac{l}{2} \leq \zeta \leq 0, \\ \left| \frac{dJ}{d\zeta} \right| = -\frac{dJ}{d\zeta} & \text{für } 0 \leq \zeta \leq +\frac{l}{2} \end{array} \right\} \quad (54,32)$$

gesetzt werden, so daß (54,23) in

$$v_x(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \int_0^{+l/2} \frac{dJ}{d\zeta} \cdot \frac{z - \zeta}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2}} d\zeta \\ - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \int_{-l/2}^0 \frac{dJ}{d\zeta} \cdot \frac{z - \zeta}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2}} d\zeta$$

oder

$$v_x(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ}{d\zeta} \cdot \frac{z - \zeta}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2}} d\zeta \quad (54,41)$$

übergeht. In entsprechender Weise ergibt sich

$$v_y(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ}{d\zeta} \cdot \frac{z - \zeta}{y^2 + (z - \zeta)^2} \cdot \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2}} \right] d\zeta \\ + \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ}{d\zeta} \cdot \frac{z - \zeta}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2}} d\zeta \quad (54,42)$$

und

$$v_z(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ}{d\zeta} \cdot \frac{y}{y^2 + (z - \zeta)^2} \cdot \left[1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - \zeta)^2}} \right] d\zeta. \quad (54,43)$$

Von besonderem Interesse sind die *Strömungsvorgänge in der YZ-Ebene*, in der die den Tragflügel repräsentierende tragende Linie durch die längs der Z-Achse symmetrisch zum Nullpunkt gelegene Strecke

$$-\frac{l}{2} \leq \zeta \leq +\frac{l}{2} \quad (54,44)$$

dargestellt wird (vgl. wieder Fig. 75). Um die hierfür charakteristischen Geschwindigkeitskomponenten $v_x^*(y, z)$, $v_y^*(y, z)$, $v_z^*(y, z)$ zu erhalten, haben wir in den vorstehenden Formeln $x = 0$ zu setzen, was die Werte

$$v_x^*(y, z) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ}{d\zeta} \cdot \frac{z - \zeta}{y \cdot \sqrt{y^2 + (z - \zeta)^2}} d\zeta$$

und

$$\left. \begin{aligned} v_y^*(y, z) &= -\frac{1}{4\pi} \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ}{d\zeta} \cdot \frac{z - \zeta}{y^2 + (z - \zeta)^2} d\zeta, \\ v_z^*(y, z) &= \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ}{d\zeta} \cdot \frac{y}{y^2 + (z - \zeta)^2} d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (54,5)$$

liefert. Formen wir den für $v_x^*(y, z)$ verzeichneten Ausdruck durch partielle Integration um, so wird wegen (54,3)

$$v_x^*(y, z) = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} J(\zeta) \cdot \frac{d}{d\zeta} \left\{ \frac{z - \zeta}{y \cdot \sqrt{y^2 + (z - \zeta)^2}} \right\} d\zeta$$

oder

$$v_x^*(y, z) = -\frac{y}{4\pi} \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{J(\zeta)}{\{y^2 + (z - \zeta)^2\}^{3/2}} d\zeta, \quad (54,51)$$

und wenn wir die durch den Ansatz

$$\varphi^*(y, z) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ}{d\zeta} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{z - \zeta}{y} d\zeta \quad (54,6)$$

definierte Funktion $\varphi^*(y, z)$ einführen, so gilt offenbar gemäß (54,5)

$$v_y^*(y, z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \varphi^*}{\partial y}, \quad v_z^*(y, z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \varphi^*}{\partial z}. \quad (54,61)$$

Vergleichen wir nun (54,6) mit (52,9) und (54,44) mit (52,81), so sehen wir, daß $\varphi^*(y, z)$ das Geschwindigkeitspotential einer zweidimensionalen Flüssigkeitsströmung darstellt, die in der YZ-Ebene von einer ebenen, daselbst

durch die Strecke (54,44) repräsentierten Wirbelschicht G mit der Zirkulationsstärke $J(\zeta)$ erzeugt wird. Für das System der in der XZ -Ebene gelegenen, die Schicht G bildenden geradlinigen Wirbelfäden L ergibt sich dabei wegen

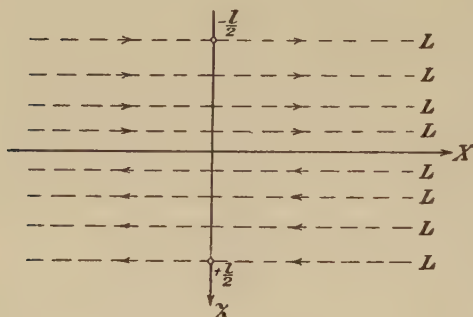


Fig. 78.

(54,31) das in Fig. 78 angedeutete Bild,¹⁾ aus dem wir dann durch Vergleich mit Fig. 76 zu der bemerkenswerten Folgerung gelangen, daß die Schicht G mit derjenigen ebenen Wirbelschicht identisch ist, die aus dem Wirbelband der Tragfläche dadurch hervorgeht, daß man sich unter Fortlassung der tragenden Linie sämtliche freien Wirbelfäden des Bandes auch in der positiven Richtung der X -Achse unbegrenzt verlängert denkt.

Wie (54,5) und (54,51) erkennen lassen, reduzieren sich die Geschwindigkeitskomponenten $v_x^*(y, z)$, $v_y^*(y, z)$ und $v_z^*(y, z)$ für $y = 0$ auf

$$v_y^*(0, z) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ}{d\zeta} \cdot \frac{1}{z - \zeta} d\zeta, \quad v_x^*(0, z) = v_z^*(0, z) = 0, \quad (54,62)$$

so daß die vom Wirbelband in Punkten der Z -Achse erzeugte Strömung zur Y -Achse parallel verläuft. Selbstverständlich ist dabei die Gültigkeit von (54,62) auf solche Werte von z beschränkt, die der Bedingung $|z| > \frac{l}{2}$ genügen; denn $P(0, 0, z)$ mit $|z| \leq \frac{l}{2}$ wäre ja ein auf

dem Wirbelband gelegener Aufpunkt, für den (54,1) und damit auch alle weiteren Formeln dieses Paragraphen ihre Bedeutung einbüßen. Da uns aber gerade die Kenntnis des Strömungsverlaufs in der unmittelbaren Umgebung der Tragfläche von Wichtigkeit sein wird, so wollen wir lediglich solche Zirkulationsverteilungen $J(z)$ als zulässig ansehen, für die der durch

$$\int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ}{d\zeta} \cdot \frac{1}{z - \zeta} d\zeta = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-l/2}^{z-\epsilon} \frac{dJ}{d\zeta} \cdot \frac{1}{z - \zeta} d\zeta + \int_{z+\epsilon}^{+l/2} \frac{dJ}{d\zeta} \cdot \frac{1}{z - \zeta} d\zeta \right\} \quad (54,7)$$

definierte Cauchysche Hauptwert²⁾ des in

$$u_0(z) = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ}{d\zeta} \cdot \frac{1}{z - \zeta} d\zeta \quad \left(-\frac{l}{2} \leq z \leq +\frac{l}{2} \right) \quad (54,71)$$

¹⁾ In Bezug auf die in Fig. 78 durch Pfeile eingezeichnete positive Richtung des Winkelgeschwindigkeitsvektors $\mathbf{w}$ ist dabei die am Schluß von § 52 gemachte Bemerkung zu beachten!

²⁾ Vgl. z. B. Serret-Scheffers Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung Bd. II, Nr. 476.

auf tretenden uneigentlichen Integrals existiert und einen positiven Wert besitzt.¹⁾ Unter dieser Voraussetzung setzen wir dann definitionsgemäß

$$\text{für } -\frac{l}{2} \leq z \leq +\frac{l}{2}$$

$$v_y^*(0, z) = -u_0(z), \quad (54,72)$$

so daß demnach das Wirbelband unmittelbar an der Tragfläche eine zur Grundströmung senkrechte Abwärtsgeschwindigkeit erzeugt, deren Betrag $u_0(z)$ durch (54,71) gegeben ist.

§ 55. Der induzierte Widerstand.

In § 34 ist bewiesen worden, daß eine beiderseits sich ins Unendliche erstreckende Tragfläche, die in eine Grundströmung mit der Translationsgeschwindigkeit V eingebettet ist, pro Einheit der Flügelbreite eine senkrecht zur Anblaserichtung wirksame Kraft $\mathfrak{P}$ vom Betrage

$$|\mathfrak{P}| = \varrho \cdot V \cdot J \quad (55,1)$$

erfährt, falls ϱ die Flüssigkeitsdichte und J die für das ebene Problem charakteristische Zirkulationskonstante bedeutet. Für Tragflügel mit einer endlichen Spannweite von der Länge l tritt gemäß § 53 an die Stelle der Zirkulationskonstanten J eine gewisse Zirkulationsverteilung von der Form

$$J = J(z), \quad (55,2)$$

wobei der Flügel durch eine längs der Z -Achse symmetrisch zum Nullpunkt angeordnete tragende Linie repräsentiert gedacht wird, und wobei die Funktion $J(z)$, in der Flügelmitte einen positiven Maximalwert

$$J_0 = J(0) \quad (55,21)$$

besitzend, bis zu den beiden Flügelenden in symmetrisch-stetiger Weise auf den Betrag Null abfällt. Wie man nun z. B. in der Mechanik des Massenpunktes beim Übergang von der Betrachtung gleichförmiger Bewegungen, für die der pro Zeiteinheit zurückgelegte Weg s eine Konstante v darstellt, zur Behandlung ungleichförmiger Bewegungen mit zeitlich variablem $v(t)$ die elementare Gleichung $s = v$ durch die Re-

lation $\frac{ds}{dt} = v(t)$ zu ersetzen pflegt, so werden wir hier in völlig analoger

Weise die Formel (55,1) zu dem Ansatz

$$\left| \frac{d\mathfrak{P}}{dz} \right| = \varrho \cdot V \cdot J(z) \quad (55,3)$$

verallgemeinern, der für die Theorie der Tragfläche von endlicher Spannweite grundlegend ist.

¹⁾ Die Existenz derartiger Funktionen $J(z)$ wird sich später (vgl. § 57) durch Aufweisung eines Beispiels ergeben. Die Forderung positiven Vorzeichens für $u_0(z)$ ist zwecks Erzielung eines positiven Widerstands zu stellen (vgl. § 55).

Alsdann muß aber ferner der Umstand Berücksichtigung finden, daß sich beim endlich breiten Flügel der horizontal dahinfließenden Grundströmung das im vorhergehenden Paragraphen untersuchte Geschwindigkeitsfeld des in § 53 eingeführten Wirbelbandes überlagert. Da nämlich diese zusätzliche Geschwindigkeit unmittelbar an der Tragfläche senkrecht nach unten gerichtet ist, so bewirkt sie eine Senkung der Anblaserichtung um einen Winkel $\eta(z)$, der offenbar (vgl. Fig. 79) durch die Beziehung

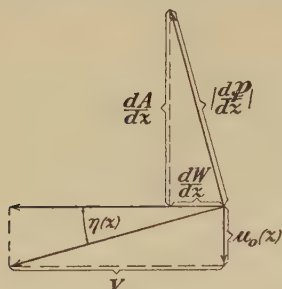


Fig. 79.

$$\operatorname{tg} \eta(z) = \frac{u_0(z)}{V} \quad (55,31)$$

mit dem in (54,71) verzeichneten Betrag $u_0(z)$ der Abwärtsgeschwindigkeit $v_y^*(0, z) = v_y(0, 0, z)$ am Flügel verbunden ist. Und da der Vektor $\frac{d\mathfrak{P}}{dz}$ auf der derart modifizierten Anblaserichtung senkrecht steht, so liefert er nicht nur die zur Grundströmung senkrechte *Auftriebskomponente*

$$\frac{dA}{dz} = \left| \frac{d\mathfrak{P}}{dz} \right| \cdot \sin \left[\frac{\pi}{2} - \eta(z) \right] = \left| \frac{d\mathfrak{P}}{dz} \right| \cdot \cos \eta(z), \quad (55,32)$$

sondern entsendet auch in die Richtung der Grundströmung eine Komponente von der Größe

$$\frac{dW}{dz} = \left| \frac{d\mathfrak{P}}{dz} \right| \cdot \cos \left[\frac{\pi}{2} - \eta(z) \right] = \left| \frac{d\mathfrak{P}}{dz} \right| \cdot \sin \eta(z), \quad (55,33)$$

die natürlich nichts anderes als die lang gesuchte *Widerstandskomponente* darstellt.

Eine wesentliche Vereinfachung der vorstehenden Formeln wird nunmehr dadurch ermöglicht, daß wir das Wirbelband der Tragfläche als ein stationäres Gebilde in die Theorie eingeführt haben. Denn dies läuft ja augenscheinlich auf die Annahme hinaus, daß die von dem Wirbelband hervorgerufenen Geschwindigkeitskomponenten (54,2) gegenüber dem Betrag V der Translationsgeschwindigkeit als äußerst kleine Größen anzusehen sind, weshalb wegen (55,31) auch $\eta(z)$ für jeden Wert von z nur sehr klein ausfallen kann. Infolgedessen dürfen wir in erster Annäherung

$$\sin \eta(z) = \eta(z), \quad \cos \eta(z) = 1$$

setzen, womit (55,31) in

$$\eta(z) = \frac{u_0(z)}{V}, \quad (55,4)$$

(55,32) in

$$\frac{dA}{dz} = \left| \frac{d\mathfrak{P}}{dz} \right| \quad (55,41)$$

und (55,33) in

$$\frac{dW}{dz} = \left| \frac{d\mathfrak{P}}{dz} \right| \cdot \eta(z) \quad (55,42)$$

übergeht. Tragen wir schließlich (55,3) und (55,4) in (55,41) bzw. (55,42) ein, so ergibt sich die *Auftriebsverteilung* zu

$$\frac{dA}{dz} = \varrho \cdot V \cdot J(z) \quad (55,5)$$

bzw. die *Widerstandsverteilung* zu

$$\frac{dW}{dz} = \varrho \cdot J(z) \cdot u_0(z), \quad (55,51)$$

so daß wir für den *Auftrieb* A der Tragfläche den Ausdruck

$$A = \varrho \cdot V \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} J(z) dz \quad (55,6)$$

erhalten, während W durch

$$W = \varrho \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} J(z) \cdot u_0(z) dz \quad (55,7)$$

gegeben ist. Da die Berechnung der Funktion $u_0(z)$, wie wir im vorhergehenden Paragraphen gesehen haben, letzten Endes auf die Berücksichtigung der wechselseitigen Beeinflussung der einzelnen Tragflügelelemente zurückgeht, so wird die gemäß (55,7) ganz wesentlich von $u_0(z)$ abhängige Widerstandsgröße W nach einem von *L. Prandtl* gemachten Vorschlag als der *induzierte Widerstand* des Tragflügels von endlicher Spannweite bezeichnet.

Man kann den Formeln (55,6) und (55,7) eine in gewisser Hinsicht handlichere Form verleihen, indem man in sie die durch (54,6) definierte Potentialfunktion $\varphi^*(y, z)$ einführt. Gemäß (54,72) und (54,61) gilt dann zunächst

$$u_0(z) = -v_y^*(0, z) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \right)_{y=0},$$

wofür wir auch

$$u_0(z) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial n} \right)_{y=0} \quad (55,81)$$

schreiben können, da die positive Normalenrichtung n des Wirbelbandes

mit der negativen Richtung der Y -Achse zusammenfällt (vgl. S. 225). Und da gemäß (52,92)

$$J(z) = 2 \cdot \varphi^*(+0, z) \quad (55,82)$$

wird, so geht (55,6) in

$$A = 2\varrho \cdot V \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} \varphi^*(+0, z) dz \quad (55,9)$$

sowie (55,7) in

$$W = \varrho \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} \varphi^*(+0, z) \cdot \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial n} \right)_{y=0} dz \quad (55,91)$$

über, womit die gewünschte Umformung erzielt ist.

§ 56. Die beiden Hauptaufgaben der Tragflügeltheorie.

Neben (55,1) ist für die Theorie der unendlich breiten Tragfläche mit überall gleichem Profil die Relation (32,5) charakteristisch, durch die die Zirkulationskonstante J in Abhängigkeit von den Profilparametern zum Ausdruck gebracht wird. Unter Berücksichtigung von (36,1) läßt sich diese Beziehung in der Form

$$J = 4\pi a \cdot V \cdot \sin \alpha_1 \quad (56,1)$$

schreiben, wobei unter a der Radius des Profilgrundkreises zu verstehen ist, während α_1 den sogenannten wirksamen Anstellwinkel des Profils gegen die durch die Grundströmung gegebene Anblaserichtung bedeutet. Bezeichnet t die Länge des größten Profildurchmessers, so ist die Größe a gemäß (38,32) und (38,46) der Einschränkung

$$\frac{t}{4} \leq a \leq \frac{t}{2}$$

unterworfen, doch wird die untere Schranke $4a = t$, die z. B. für die in § 40 bzw. § 41 behandelten Strecken- und Kreisbogenprofile genau zutrifft, auch bei der weitaus überwiegenden Mehrzahl der praktisch gebräuchlichen Flügelprofile nur ganz unwesentlich überschritten. Da überdies der Anstellwinkel α_1 einen stets verhältnismäßig kleinen Wert besitzt, so dürfen wir (56,1) unbedenklich in die Näherungsformel

$$J = \pi V t \cdot \alpha_1 \quad (56,11)$$

abändern.

Beim Übergang zur *Prandtlschen* Tragflügeltheorie wird nun (56,11) in verschiedener Hinsicht zu modifizieren sein. Zunächst ist natürlich $J(z)$ statt J zu schreiben, und ferner muß der wirksame Anstellwinkel α_1 um den in (55,4) verzeichneten Winkel $\eta(z)$ vermindert werden, damit der durch die zusätzliche Abwärtsströmung am Flügel bedingten Senkung der Anblaserichtung Rechnung getragen wird. Schließlich werden wir

uns von der Beschränkung auf einen konstanten Profildurchmesser t und einen konstanten Anstellwinkel α_1 befreien, indem wir t durch $t(z)$ sowie α_1 durch $\alpha_1(z)$ ersetzen, wobei $t(z)$ und $\alpha_1(z)$ zwei längs der tragenden Linie stetige und stetig differenzierbare Funktionen von z sein sollen. Auf diese Weise erhalten wir dann die Gleichung

$$J(z) = \pi V \cdot t(z) \cdot \left\{ \alpha_1(z) - \frac{u_0(z)}{V} \right\}, \quad (56,2)$$

in der der Zusammenhang zwischen der Zirkulationsverteilung $J(z)$ sowie der Gestalt und Stellung des Tragflügels von endlicher Spannweite seine analytische Formulierung gefunden hat.

Die Ansätze (54,71) und (56,2) stellen in Verbindung mit (55,6) und (55,7) die *Grundgleichungen der Prandtl'schen Tragflügeltheorie* dar. Sie bieten uns prinzipiell die Möglichkeit, diejenigen Aufgaben für den begrenzten Flügel zu lösen, die den beiden in § 39 hervorgehobenen Problemen der Theorie der unendlich breiten Tragfläche — nämlich einerseits der Auffindung von Profilformen mit vorgegebenen Auftriebseigenschaften und andererseits der Ermittlung des Auftriebs bekannter Profile — entsprechen. Genauer lassen sich die beiden *Hauptaufgaben der Tragflügeltheorie* folgendermaßen kennzeichnen:

1. Gegeben ist die Zirkulationsverteilung $J(z)$ und damit gemäß (55,5) die Auftriebsverteilung $\frac{dA}{dz}$ bzw. gemäß (55,6) der Auftrieb A . Gesucht wird der induzierte Widerstand W sowie diejenige Flügelgestalt, die der vorgegebenen Zirkulationsverteilung $J(z)$ entspricht.

2. Gegeben ist ein bestimmter Tragflügel, insbesondere also sein Profildurchmesser $t(z)$ und sein wirksamer Anstellwinkel $\alpha_1(z)$. Gesucht werden der Auftrieb A und der induzierte Widerstand W dieses Flügels.

Die Lösung der ersten Aufgabe ist prinzipiell sehr einfach zu bewerkstelligen. Durch Auswertung von (54,72) erhält man zunächst gemäß (54,71) den Betrag $u_0(z)$ der Abwärtsgeschwindigkeit (54,71), mit dem dann der induzierte Widerstand W gemäß (55,7) durch Integration gefunden werden kann. Ferner gestattet (56,2) die Frage nach der Flügelgestalt wenigstens insofern zu beantworten, als sich bei gegebener Form der Profilkontur zu jedem Durchmesser $t(z)$ ein wirksamer Anstellwinkel $\alpha_1(z)$ oder umgekehrt zu jedem Anstellwinkel $\alpha_1(z)$ ein Profildurchmesser $t(z)$ ermitteln läßt.

Wesentlich schwieriger wird die Behandlung der zweiten Aufgabe, weil in (56,2) für gegebenes $t(z)$ und $\alpha_1(z)$ sowohl $J(z)$ als auch $u_0(z)$ als unbekannte Funktionen fungieren, zwischen denen überdies die Relation (54,71) bestehen muß. Drückt man demnach $u_0(z)$ gemäß (56,2) durch $J(z)$ aus, setzt also

$$u_0(z) = V \cdot \alpha_1(z) - \frac{J(z)}{\pi \cdot t(z)}, \quad (56,21)$$

und trägt dann diesen Wert in (54,71) ein, so erhält man in der Beziehung

$$J(z) = \pi V \cdot t(z) \cdot \alpha_1(z) - \frac{t(z)}{4} \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ}{d\zeta} \cdot \frac{1}{z - \zeta} d\zeta \quad (56,3)$$

eine Integro-Differentialgleichung, aus der $J(z)$ zu berechnen ist. Der weitere Verlauf wäre hierauf natürlich der, daß mit dem gefundenen $J(z)$ zunächst $u_0(z)$ gemäß (56,21) und alsdann A gemäß (55,6) sowie W gemäß (55,7) ermittelt wird.

Eine andere, von E. Trefftz¹⁾ erkannte Lösungsmöglichkeit beruht auf der Verwendung der Formeln (55,9) und (55,91), durch die sich die Bestimmung von A und W auf die Berechnung der Funktion $\varphi^*(y, z)$ reduziert. Diese Funktion ist eine in der ganzen, längs der die tragende Linie enthaltenden Strecke g aufgeschlitzten YZ -Ebene reguläre Potentialfunktion, da sie ja, wie wir in § 54 gesehen haben, das Geschwindigkeitspotential derjenigen zweidimensionalen Flüssigkeitsströmung darstellt, die von einer durch g repräsentierten ebenen Wirbelschicht mit der Zirkulationsstärke $J(z)$ in der YZ -Ebene erzeugt wird. Mit Benutzung von (55,81) und (55,82) nimmt dann (56,2) die Form der von der Funktion $\varphi^*(y, z)$ auf g zu erfüllenden Randbedingung

$$2 \cdot \varphi^*(+0, z) = \pi V \cdot t(z) \cdot \left\{ \alpha_1(z) - \frac{1}{2V} \cdot \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial n} \right)_{y=0} \right\} \quad (56,4)$$

an, so daß die Auftriebs- und Widerstandsberechnung für vorgelegte Tragflügel nach dem Trefftz'schen Verfahren auf die Behandlung einer gemischten Randwertaufgabe der Potentialtheorie hinausläuft.

§ 57. Die elliptische Zirkulationsverteilung.

Als Beispiel für die erste Hauptaufgabe der Tragflügeltheorie wollen wir den durch den Ansatz

$$J(z) = \frac{J_0}{l} \cdot \sqrt{l^2 - 4z^2} \quad (57,1)$$

gekennzeichneten Fall einer *elliptischen Zirkulationsverteilung* behandeln, der sich im nächsten Paragraphen als besonders bedeutsam erweisen wird. Wegen

$$\frac{dJ}{dz} = -\frac{4J_0}{l} \cdot \frac{z}{\sqrt{l^2 - 4z^2}} \quad (57,11)$$

wird dann gemäß (54,71)

$$u_0(z) = -\frac{J_0}{\pi l} \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{\zeta}{(z - \zeta) \cdot \sqrt{l^2 - 4\zeta^2}} d\zeta,$$

¹⁾ E. Trefftz, Math. Ann. Bd. 82, S. 306; 1921.

wofür wir mit

$$\zeta = \frac{l}{2} \cdot \cos \Theta, \quad z = \frac{l}{2} \cdot \cos \Theta_0$$

auch

$$u_0(z) = \frac{J_0}{2\pi l} \cdot \int_{\pi}^0 \frac{\cos \Theta}{\cos \Theta_0 - \cos \Theta} d\Theta \quad (57,2)$$

schreiben können, wobei natürlich in Analogie zu (54,7)

$$\int_{\pi}^0 \frac{\cos \Theta}{\cos \Theta_0 - \cos \Theta} d\Theta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\pi}^{\Theta_0 + \varepsilon} \frac{\cos \Theta}{\cos \Theta_0 - \cos \Theta} d\Theta + \int_{\Theta_0 - \varepsilon}^0 \frac{\cos \Theta}{\cos \Theta_0 - \cos \Theta} d\Theta \right\} \quad (57,21)$$

zu setzen ist. Nun gilt zunächst

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos \Theta}{\cos \Theta_0 - \cos \Theta} d\Theta &= \\ \int \frac{(\cos \Theta - \cos \Theta_0) + \cos \Theta_0}{\cos \Theta_0 - \cos \Theta} d\Theta &= -\Theta + \int \frac{\cos \Theta_0}{\cos \Theta_0 - \cos \Theta} d\Theta, \quad (57,22) \end{aligned}$$

und wenn wir vorübergehend $\cos \Theta_0 = a$ sowie

$$t = tg \frac{\Theta}{2} = \frac{\sin \Theta}{2 \cdot \cos^2 \frac{\Theta}{2}}$$

einführen¹⁾, so wird

$$\int \frac{\cos \Theta_0}{\cos \Theta_0 - \cos \Theta} d\Theta = \frac{2a}{a+1} \cdot \int \frac{dt}{t^2 - \frac{1-a}{1+a}} = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \ln \frac{t - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}{t + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}$$

oder

$$\int \frac{\cos \Theta_0}{\cos \Theta_0 - \cos \Theta} d\Theta = ctg \Theta_0 \cdot \ln \frac{\frac{\sin \Theta}{2 \cos^2 \frac{\Theta}{2}} - tg \frac{\Theta_0}{2}}{\frac{\sin \Theta}{2 \cos^2 \frac{\Theta}{2}} + tg \frac{\Theta_0}{2}}, \quad (57,23)$$

¹⁾ Dann wird also $\Theta = 2 \cdot \arctg t$, mithin $\frac{d\Theta}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$, und aus $t = tg \frac{\Theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos \Theta}{1+\cos \Theta}}$ berechnet sich

$$\cos \Theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

da ja

$$\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} = \sqrt{\frac{1-\cos\Theta_0}{1+\cos\Theta_0}} = tg \frac{\Theta_0}{2}$$

ist. Mit (57,22) und (57,23) liefert aber (57,21) die Beziehung

$$\int_{\pi}^0 \frac{\cos\Theta}{\cos\Theta_0 - \cos\Theta} d\Theta = \pi,$$

so daß gemäß (57,2)

$$u_0(z) = \frac{J_0}{2l} \quad (57,3)$$

wird. Die elliptische Zirkulationsverteilung ist demnach mit einer längs der ganzen Tragflügelspannweite konstanten Abwärtsgeschwindigkeit verbunden.

Um den Auftrieb A zu berechnen, haben wir (57,1) in (55,6) einzusetzen, was

$$A = \frac{\varrho V J_0}{l} \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} \sqrt{l^2 - 4z^2} dz = \frac{\varrho V J_0}{l} \cdot \left[\frac{z}{2} \cdot \sqrt{l^2 - 4z^2} + \frac{l^2}{4} \cdot \arcsin \frac{2z}{l} \right]_{-l/2}^{+l/2}$$

oder

$$A = \frac{\pi \varrho V l J_0}{4} \quad (57,4)$$

ergibt. Überaus einfach gestaltet sich hier die Ermittlung des induzierten Widerstandes W , da man durch Eintragen von (57,3) in (55,7) unter Beachtung von (55,6) die Relation

$$W = \varrho \cdot \frac{J_0}{2l} \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} J(z) dz = \frac{J_0}{2Vl} \cdot A \quad (57,5)$$

erhält, der sich dann durch Elimination der Zirkulationsgröße J_0 mit Hilfe von (57,4) die Form

$$W = \frac{2A^2}{\pi \varrho V^2 l^2} \quad (57,51)$$

verleihen läßt.

Die Frage nach der Gestalt einer Tragfläche mit elliptischer Zirkulationsverteilung kann beantwortet werden, sobald man sowohl die Form als auch den wirksamen Anstellwinkel α_1 jedes Flügelprofils als längs der ganzen Spannweite von der Länge l konstant voraussetzt. Alsdann lehrt nämlich (56,2) in Verbindung mit (57,1) und (57,3), daß

$$t(z) = \frac{t_0}{l} \cdot \sqrt{l^2 - 4z^2}$$

mit

$$t_0 = \frac{2lJ_0}{\pi \cdot \{2lV\alpha_1 - J_0\}}$$

gelten, mithin der Profildurchmesser $t(z)$ nach einem elliptischen Gesetz variieren muß.

§ 58. Tragflächen kleinsten Widerstandes.

In praktischer Hinsicht ist die Frage von Wichtigkeit, welche Form man einer Tragfläche geben muß, um bei vorgeschriebenem Auftrieb A einen möglichst kleinen induzierten Widerstand W zu erhalten. Mathematisch läuft dieses Problem gemäß (55,7) und (54,71) auf die Aufgabe hinaus, eine Zirkulationsverteilung $J(z)$ derart zu bestimmen, daß das Doppelintegral

$$W = \frac{\rho}{4\pi} \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} J(z) dz \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ}{d\zeta} \cdot \frac{1}{z-\zeta} d\zeta \quad (58,1)$$

ein Minimum wird, falls gemäß (55,6) das einfache Integral

$$A = \rho V \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} J(z) dz \quad (58,11)$$

einen festen vorgegebenen Wert besitzt.

Um zur Lösung dieses Variationsproblems zu gelangen, führen wir zwei der Bedingung

$$f_1\left(+\frac{l}{2}\right) = f_1\left(-\frac{l}{2}\right) = f_2\left(+\frac{l}{2}\right) = f_2\left(-\frac{l}{2}\right) = 0 \quad (58,2)$$

genügende Hilfsfunktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ sowie zwei Parameter ε_1 und ε_2 ein, mit deren Hilfe wir die beiden Ansätze

$$W^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2) =$$

$$\int_{-l/2}^{+l/2} \{J(z) + \varepsilon_1 \cdot f_1(z) + \varepsilon_2 \cdot f_2(z)\} dz \int_{-l/2}^{+l/2} \left\{ \frac{dJ}{d\zeta} + \varepsilon_1 \cdot \frac{df_1}{d\zeta} + \varepsilon_2 \cdot \frac{df_2}{d\zeta} \right\} \cdot \frac{1}{z-\zeta} d\zeta \quad (58,21)$$

und

$$A^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_{-l/2}^{+l/2} \{J(z) + \varepsilon_1 \cdot f_1(z) + \varepsilon_2 \cdot f_2(z)\} dz \quad (58,22)$$

machen.¹⁾ Soll dann $J(z)$ die soeben formulierte Eigenschaft haben, so muß die Funktion $W^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ wegen

$$W^*(0,0) = \frac{4\pi \cdot W}{\varrho} \quad \text{und} \quad A^*(0,0) = \frac{A}{\varrho \cdot V}$$

an der Stelle $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ ein Minimum annehmen, falls zugleich

$$\int_{-l/2}^{+l/2} \{J(z) + \varepsilon_1 \cdot f_1(z) + \varepsilon_2 \cdot f_2(z)\} dz = \frac{A}{\varrho \cdot V} \quad (58,23)$$

gilt. Als notwendige Bedingung hierfür ist aber aus der Differentialrechnung das Bestehen der beiden Relationen²⁾

$$\left[\frac{\partial W^*}{\partial \varepsilon_1} + \lambda \cdot \frac{\partial A^*}{\partial \varepsilon_1} \right]_0 = 0, \quad \left[\frac{\partial W^*}{\partial \varepsilon_2} + \lambda \cdot \frac{\partial A^*}{\partial \varepsilon_2} \right]_0 = 0 \quad (58,3)$$

bekannt, wobei sich der Index 0 auf die Stelle $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ bezieht, und wobei unter λ ein fester Parameter zu verstehen ist. Nun erhalten wir gemäß (58,21)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W^*}{\partial \varepsilon_1} &= \int_{-l/2}^{+l/2} f_1(z) dz \int_{-l/2}^{+l/2} \left\{ \frac{dJ}{d\zeta} + \varepsilon_1 \cdot \frac{df_1}{d\zeta} + \varepsilon_2 \cdot \frac{df_2}{d\zeta} \right\} \cdot \frac{1}{z-\zeta} d\zeta \\ &\quad + \int_{-l/2}^{+l/2} \{J(z) + \varepsilon_1 \cdot f_1(z) + \varepsilon_2 \cdot f_2(z)\} dz \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{df_1}{d\zeta} \cdot \frac{1}{z-\zeta} d\zeta, \\ \frac{\partial W^*}{\partial \varepsilon_2} &= \int_{-l/2}^{+l/2} f_2(z) dz \int_{-l/2}^{+l/2} \left\{ \frac{dJ}{d\zeta} + \varepsilon_1 \cdot \frac{df_1}{d\zeta} + \varepsilon_2 \cdot \frac{df_2}{d\zeta} \right\} \cdot \frac{1}{z-\zeta} d\zeta \\ &\quad + \int_{-l/2}^{+l/2} \{J(z) + \varepsilon_1 \cdot f_1(z) + \varepsilon_2 \cdot f_2(z)\} dz \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{df_2}{d\zeta} \cdot \frac{1}{z-\zeta} d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (58,31)$$

sowie gemäß (58,22)

$$\frac{\partial A^*}{\partial \varepsilon_1} = \int_{-l/2}^{+l/2} f_1(z) dz, \quad \frac{\partial A^*}{\partial \varepsilon_2} = \int_{-l/2}^{+l/2} f_2(z) dz, \quad (58,32)$$

¹⁾ Dabei ist natürlich hinsichtlich der Hilfsfunktionen $f_1(z)$ und $f_2(z)$ die Forderung zu stellen, daß die in Analogie zu (54,7) definierten *Cauchyschen* Hauptwerte der beiden uneigentlichen Integrale

$$\int_{-l/2}^{+l/2} \frac{df_1}{d\zeta} \cdot \frac{1}{z-\zeta} d\zeta \quad \text{und} \quad \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{df_2}{d\zeta} \cdot \frac{1}{z-\zeta} d\zeta$$

existieren und einen positiven Wert besitzen.

²⁾ Vgl. z. B. *H. v. Mangoldt*, Einführung in die höhere Mathematik Bd. II, Nr. 122.

so daß

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial W^*}{\partial \varepsilon_1} \right]_0 &= \int_{-l/2}^{+l/2} f_1(z) dz \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ}{d\zeta} \cdot \frac{1}{z-\zeta} d\zeta + \int_{-l/2}^{+l/2} J(z) dz \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{df_1}{d\zeta} \cdot \frac{1}{z-\zeta} d\zeta, \\ \left[\frac{\partial W^*}{\partial \varepsilon_2} \right]_0 &= \int_{-l/2}^{+l/2} f_2(z) dz \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ}{d\zeta} \cdot \frac{1}{z-\zeta} d\zeta + \int_{-l/2}^{+l/2} J(z) dz \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{df_2}{d\zeta} \cdot \frac{1}{z-\zeta} d\zeta \end{aligned} \right\} (58,33)$$

wird, während die Ableitungen (58,32) Konstanten darstellen. Durch partielle Integration ergibt sich unter Beachtung von (58,2) zunächst

$$\int_{-l/2}^{+l/2} \frac{df_1}{d\zeta} \cdot \frac{1}{z-\zeta} d\zeta = - \int_{-l/2}^{+l/2} f_1(\zeta) \cdot \frac{1}{(z-\zeta)^2} d\zeta,$$

so daß

$$\int_{-l/2}^{+l/2} J(z) dz \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{df_1}{d\zeta} \cdot \frac{1}{z-\zeta} d\zeta = - \int_{-l/2}^{+l/2} J(z) dz \int_{-l/2}^{+l/2} f_1(\zeta) \cdot \frac{1}{(z-\zeta)^2} d\zeta$$

oder nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge auf der rechten Seite

$$\int_{-l/2}^{+l/2} J(z) dz \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{df_1}{d\zeta} \cdot \frac{1}{z-\zeta} d\zeta = - \int_{-l/2}^{+l/2} f_1(\zeta) d\zeta \int_{-l/2}^{+l/2} J(z) \cdot \frac{1}{(z-\zeta)^2} dz \quad (58,34)$$

gilt. Nochmalige Anwendung von partieller Integration liefert dann

$$\int_{-l/2}^{+l/2} J(z) \cdot \frac{1}{(z-\zeta)^2} dz = \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ}{dz} \cdot \frac{1}{z-\zeta} dz = - \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ}{dz} \cdot \frac{1}{\zeta-z} dz,$$

womit (58,34) in

$$\int_{-l/2}^{+l/2} J(z) dz \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{df_1}{d\zeta} \cdot \frac{1}{z-\zeta} d\zeta = \int_{-l/2}^{+l/2} f_1(\zeta) d\zeta \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ}{dz} \cdot \frac{1}{\zeta-z} dz$$

oder nach Vertauschung der Symbole z und ζ auf der rechten Seite in

$$\int_{-l/2}^{+l/2} J(z) dz \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{df_1}{d\zeta} \cdot \frac{1}{z-\zeta} d\zeta = \int_{-l/2}^{+l/2} f_1(z) dz \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ}{d\zeta} \cdot \frac{1}{z-\zeta} d\zeta$$

übergeht. Trägt man dies in die erste der beiden Gleichungen (58,33) ein, so erhält man

$$\left[\frac{\partial W^*}{\partial \varepsilon_1} \right]_0 = 2 \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} f_1(z) dz \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ}{d\zeta} \cdot \frac{1}{z-\zeta} d\zeta, \quad (58,35)$$

und in genau entsprechender Weise wird

$$\left[\frac{\partial W^*}{\partial \varepsilon_2} \right]_0 = 2 \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} f_2(z) dz \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ}{d\zeta} \cdot \frac{1}{z-\zeta} d\zeta. \quad (58,36)$$

Sollen also die beiden Bedingungen (58,3) erfüllt sein, so müssen wegen (58,32), (58,35) und (58,36) die Relationen

$$\begin{aligned} 2 \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} f_1(z) dz \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ}{d\zeta} \cdot \frac{1}{z-\zeta} d\zeta + \lambda \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} f_1(z) dz &= 0, \\ 2 \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} f_2(z) dz \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ}{d\zeta} \cdot \frac{1}{z-\zeta} d\zeta + \lambda \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} f_2(z) dz &= 0 \end{aligned}$$

bestehen, was aber augenscheinlich dann und nur dann möglich ist, falls

$$\int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ}{d\zeta} \cdot \frac{1}{z-\zeta} d\zeta = \text{const.} \quad (58,4)$$

gilt.

Um jetzt zu zeigen, daß die für das Eintreten des Minimums notwendige Bedingung (58,4) auch hinreichend ist, denken wir uns den Parameter ε_2 mit Benutzung von (58,23) und (58,11) durch

$$\varepsilon_1 \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} f_1(z) dz + \varepsilon_2 \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} f_2(z) dz = 0$$

als lineare Funktion des Parameters ε_1 ausgedrückt und diesen Wert in (58,21) eingetragen, wodurch $W^*(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ zu einer Funktion $W^{**}(\varepsilon_1)$ der einen Variablen ε_1 wird, deren erste und zweite Ableitung durch

$$\begin{aligned} \frac{dW^{**}}{d\varepsilon_1} &= \int_{-l/2}^{+l/2} \{ J(z) + \varepsilon_1 \cdot f_1(z) + \varepsilon_2 \cdot f_2(z) \} dz \int_{-l/2}^{+l/2} \left\{ \frac{df_1}{d\zeta} + c \cdot \frac{df_2}{d\zeta} \right\} \cdot \frac{1}{z-\zeta} d\zeta \\ &+ \int_{-l/2}^{+l/2} \{ f_1(z) + c \cdot f_2(z) \} dz \int_{-l/2}^{+l/2} \left\{ \frac{dJ}{d\zeta} + \varepsilon_1 \cdot \frac{df_1}{d\zeta} + \varepsilon_2 \cdot \frac{df_2}{d\zeta} \right\} \cdot \frac{1}{z-\zeta} d\zeta \end{aligned}$$

bzw. durch

$$\frac{d^2 W^{**}}{d\varepsilon_1^2} = 2 \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} \{ f_1(z) + c \cdot f_2(z) \} dz \int_{-l/2}^{+l/2} \left\{ \frac{df_1}{d\zeta} + c \cdot \frac{df_2}{d\zeta} \right\} \cdot \frac{1}{z-\zeta} d\zeta \quad (58,41)$$

mit

$$c = \frac{d\varepsilon_2}{d\varepsilon_1} = \text{const.}$$

gegeben sind. Nun stellt aber die rechte Seite von (58,41) gemäß (58,1), von einem unwesentlichen positiven Faktor abgesehen, den zu der Zirkulationsverteilung

$$J^*(z) = f_1(z) + c \cdot f_2(z)$$

gehörenden induzierten Widerstand dar, so daß $\frac{d^2 W^{**}}{d\varepsilon_1^2}$ eine sicherlich positive Größe, mithin W^{**} eine solche Funktion von ε_1 sein muß, die lediglich ein Minimum besitzen kann. Infolgedessen ist (58,4) tatsächlich als notwendige und zugleich auch hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit unseres Minimumproblems anzusprechen, und da (54,71) mit (58,4) in

$$u_0(z) = \text{const.} \quad (58,5)$$

übergeht, so läßt sich unser Ergebnis dahin formulieren, daß eine Tragfläche bei vorgeschriebener Größe des Auftriebs einen kleinsten induzierten Widerstand dann und nur dann erfährt, falls die zugehörige Zirkulationsverteilung $J(z)$ an der tragenden Linie eine konstante Abwärtsgeschwindigkeit hervorruft.

Nunmehr bleibt noch die Frage zu erörtern, ob die Zirkulationsverteilung $J(z)$ durch die Forderung (58,4) bzw. (58,5) eindeutig festgelegt wird. Seien $J_1(z)$ und $J_2(z)$ zwei Funktionen von z , die der Bedingung (58,4) genügen, und seien $\varphi_1^*(y, z)$ und $\varphi_2^*(y, z)$ die ihnen gemäß (54,6) zugeordneten Geschwindigkeitspotentiale. Dann sind $\varphi_1^*(y, z)$ sowie $\varphi_2^*(y, z)$ und damit auch

$$\varphi_0^*(y, z) = \varphi_1^*(y, z) - \varphi_2^*(y, z) \quad (58,6)$$

solche Potentialfunktionen, deren Regularitätsgebiet B^* aus der YZ -Ebene dadurch hervorgeht, daß man sich längs der auf der Z -Achse symmetrisch zum Nullpunkt gelegenen Strecke g

$$\left(-\frac{l}{2} \leq z \leq +\frac{l}{2}\right)$$

einen Schnitt geführt

denkt, dessen rechtes und linkes Ufer, zu einer geschlossenen Kurve C^* aneinandergefügt, als Berandung C^* von B^* anzusprechen sind (vgl. Fig. 80). Infolgedessen gilt¹⁾

$$\int_{(B^*)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_0^*}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_0^*}{\partial z} \right)^2 \right\} d\sigma = - \int_{(C^*)} \varphi_0^* \cdot \frac{\partial \varphi_0^*}{\partial n} ds$$

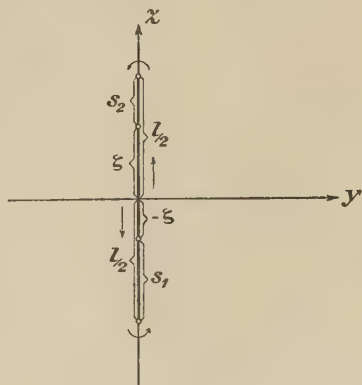


Fig. 80.

¹⁾ Vgl. z. B. W. Sternberg, Potentialtheorie I (Sammlung Götschen Nr. 901), § 13, unter Beachtung der in der Fußnote auf S. 68 bezüglich des Vorzeichens gemachten Bemerkung.

oder

$$\int_{(B^*)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_0^*}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_0^*}{\partial z} \right)^2 \right\} d\sigma$$

$$= - \int_0^l \varphi_0^*(+0, \zeta) \cdot \frac{\partial \varphi_0^*}{\partial n_1} ds_1 - \int_0^l \varphi_0^*(-0, \zeta) \cdot \frac{\partial \varphi_0^*}{\partial n_2} ds_2, \quad (58,61)$$

wobei sich der Index 1 an n und s auf das rechte, der Index 2 hingegen auf das linke Schlitzufer bezieht. Da aber die positive Normalenrichtung am rechten Schlitzufer mit der negativen, am linken Schlitzufer mit der positiven Richtung der Y -Achse übereinstimmt, so ist

$$\frac{\partial \varphi_0^*}{\partial n_1} = - \frac{\partial \varphi_0^*}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi_0^*}{\partial n_2} = \frac{\partial \varphi_0^*}{\partial y}$$

zu setzen; überdies wird

$$s_1 = \frac{l}{2} + \zeta, \quad s_2 = \frac{l}{2} - \zeta,$$

so daß (58,61) in

$$\int_{(B^*)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_0^*}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_0^*}{\partial z} \right)^2 \right\} d\sigma = \int_{-l/2}^{+l/2} \varphi_0^*(+0, \zeta) \cdot \frac{\partial \varphi_0^*}{\partial y} d\zeta + \int_{+l/2}^{-l/2} \varphi_0^*(-0, \zeta) \cdot \frac{\partial \varphi_0^*}{\partial y} d\zeta$$

oder

$$\int_{(B^*)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_0^*}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_0^*}{\partial z} \right)^2 \right\} d\sigma = \int_{-l/2}^{+l/2} \left\{ \varphi_0^*(+0, \zeta) - \varphi_0^*(-0, \zeta) \right\} \cdot \frac{\partial \varphi_0^*}{\partial y} d\zeta$$

übergeht, wofür wir unter Beachtung von (52,91) auch

$$\int_{(B^*)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_0^*}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_0^*}{\partial z} \right)^2 \right\} d\sigma = \int_{-l/2}^{+l/2} 2 \cdot \varphi_0^*(+0, \zeta) \cdot \frac{\partial \varphi_0^*}{\partial y} d\zeta \quad (58,62)$$

schreiben können. Wegen (58,6) gilt nun gemäß (55,81)

$$\left(\frac{\partial \varphi_0^*}{\partial y} \right)_{y=0} = - \left(\frac{\partial \varphi_0^*}{\partial n} \right)_{y=0} = - \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_1^*}{\partial n} \right)_{y=0} - \left(\frac{\partial \varphi_2^*}{\partial n} \right)_{y=0} \right\}$$

$$= -2 \cdot \{ u_0^{(1)}(\zeta) - u_0^{(2)}(\zeta) \}$$

sowie gemäß (55,82)

$$2 \cdot \varphi_0^*(+0, \zeta) = 2 \cdot \{ \varphi_1^*(+0, \zeta) - \varphi_2^*(+0, \zeta) \} = J_1(\zeta) - J_2(\zeta), \quad (58,63)$$

und da nach Voraussetzung gemäß (58,5)

$$u_0^{(1)}(\zeta) - u_0^{(2)}(\zeta) = \text{const.}$$

sowie unter Beachtung von (58,11)

$$\int_{-l/2}^{+l/2} J_1(\zeta) d\zeta = \int_{-l/2}^{+l/2} J_2(\zeta) d\zeta = \frac{A}{\varrho \cdot V} \quad (58,64)$$

zu setzen ist, so liefert (58,62) die Beziehung

$$\int_{(B^*)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_0^*}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_0^*}{\partial z} \right)^2 \right\} d\sigma = 0,$$

aus der nach bekannter Schlußweise sofort die für ganz B^* gültige Relation

$$\frac{\partial \varphi_0^*}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_0^*}{\partial z} = 0$$

oder

$$\varphi_0^*(y, z) = \text{const.}$$

folgt. Demnach müßte gemäß (58,63)

$$J_1(z) - J_2(z) = \text{const.}$$

werden, doch kann der Wert der hierin auftretenden Konstanten wegen (58,64) einzig und allein Null betragen, womit die Identität der beiden Funktionen $J_1(z)$ und $J_2(z)$ bewiesen ist. *Die Zirkulationsverteilung $J(z)$ wird demnach durch die Bedingung (58,4) bzw. (58,5) in durchaus eindeutiger Weise festgelegt.*

Die Wichtigkeit der soeben erkannten Tatsache erscheint unmittelbar einleuchtend, wenn wir uns daran erinnern, daß gemäß (57,3) die elliptische Zirkulationsverteilung (57,1) der Bedingung (58,5) genügt. Diese Verteilung ist demnach die einzige, der die genannte Eigenschaft zukommen kann, und so lassen sich die Ausführungen des vorliegenden Paragraphen dahin zusammenfassen, daß *lediglich ein Tragflügel mit elliptischer Zirkulationsverteilung dadurch ausgezeichnet ist, daß er bei vorgeschriebener Größe des Auftriebs den kleinsten mit dieser Forderung überhaupt erzielbaren induzierten Widerstand erfährt¹⁾.*

§ 59. Der rechteckige Tragflügel.

Das einfachste Beispiel für die zweite Hauptaufgabe der Tragflügeltheorie bietet offenbar der Fall eines Flügels mit rechteckigem Umriß, dessen beliebig geformtes Profil nebst wirksamem Anstellwinkel längs der ganzen Spannweite keine Änderung erfahren. Alsdann geht (56,3) in die Gleichung

$$J(z) = \pi V t_0 a_1 - \frac{t_0}{4} \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dJ}{d\zeta} \cdot \frac{1}{z - \zeta} d\zeta \quad (59,1)$$

¹⁾ Vgl. M. Munk, Diss. Göttingen 1919.

über, in der t_0 und α_1 zwei von z unabhängige Größen bedeuten, und aus der jetzt $J(z)$ zu ermitteln ist. Eine Lösung dieses Problems hat als erster A. Betz¹⁾ in der Weise gegeben, daß er für die Zirkulationsverteilung $J(z)$ den Ansatz

$$J(z) = J_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{2z}{l}\right)^2} \cdot \left\{ 1 + a_2 \cdot \left(\frac{2z}{l}\right)^2 + a_4 \cdot \left(\frac{2z}{l}\right)^4 + \dots + a_{2n} \cdot \left(\frac{2z}{l}\right)^{2n} + \dots \right\} \quad (59,11)$$

mit den vorläufig noch unbekannten konstanten Koeffizienten

$$a_{2\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots, n, \dots)$$

macht, diesen Ausdruck in (59,1) einführt und damit zu einem System von unendlich vielen linearen Gleichungen mit den unendlich vielen Unbekannten $a_{2\nu}$ gelangt, das unter Verwendung äußerst umfangreicher und mühseliger Rechnungen näherungsweise aufgelöst wird. Wesentlich weniger umständlich gestaltet sich die rechnerische Arbeit bei der von R. Fuchs²⁾ befolgten Methode, die darin besteht, mit Hilfe von (59,11) zunächst gemäß (54,71) die Abwärtsgeschwindigkeit $u_0(z)$ in der Form

$$u_0(z) = -\frac{J_0}{2\pi l} \cdot \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{\frac{2\zeta}{l}}{\sqrt{1 - \left(\frac{2\zeta}{l}\right)^2}} \left\{ (1 - 2a_2) + (3a_2 - 4a_4) \cdot \left(\frac{2\zeta}{l}\right)^2 + (5a_4 - 6a_6) \cdot \left(\frac{2\zeta}{l}\right)^4 + \dots \right\} \cdot \frac{1}{z - \zeta} d\zeta$$

anzusetzen, und die Koeffizienten $a_{2\nu}$ durch die Bedingung zu bestimmen, daß der dann gemäß (56,2) durch

$$\alpha_1(z) = \frac{J(z)}{\pi V t_0} + \frac{u_0(z)}{V}$$

als Funktion von z gegebene wirksame Anstellwinkel $\alpha_1(z)$ mit möglichst guter Annäherung konstant ausfällt.

Besonders elegant ist das Trefftz'sche Verfahren³⁾, dessen Prinzip bereits am Schluß von § 56 dargelegt wurde, und das wir jetzt für den Spezialfall des rechteckigen Flügels in Kürze noch etwas näher erläutern wollen. Hierbei handelt es sich also um die Lösung der Aufgabe, eine in der längs $g^*(-\frac{1}{2}l \leq z \leq +\frac{1}{2}l)$ aufgeschlitzten YZ -Ebene reguläre Potentialfunktion $\varphi^*(y, z)$ zu finden, die gemäß (56,4) auf g^* der Randbedingung

$$2 \cdot \varphi^*(+0, z) = \pi V t_0 \cdot \left\{ \alpha_1 - \frac{1}{2V} \cdot \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial n} \right)_{y=0} \right\}$$

¹⁾ A. Betz, Göttinger Diss. (München 1919).

²⁾ R. Fuchs, Zs. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 1, S. 106; 1921.

³⁾ E. Trefftz, Zs. für angew. Math. und Mech. Bd. 1, S. 206; 1921.

genügt, wofür wir unter Beachtung der Tatsache, daß die positive Normalenrichtung n längs g^* mit der negativen Richtung der Y -Achse zusammenfällt, auch

$$2 \cdot \varphi^*(+0, z) = V t_0 \alpha_1 \cdot \left\{ \pi + \frac{\pi}{2 V \alpha_1} \cdot \left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial y} \right)_{y=0} \right\} \quad (59,2)$$

schreiben können. Zur Vereinfachung dieser Beziehung führen wir nun zunächst anstelle von y und z die neuen Koordinaten u und w durch die beiden Substitutionen

$$u = \frac{4y}{\pi t_0}, \quad w = \frac{4z}{\pi t_0} \quad (59,21)$$

ein und setzen überdies

$$\varphi(u, w) = \frac{1}{V t_0 \alpha_1} \cdot \varphi^*(y, z) \quad (59,22)$$

sowie

$$\lambda = \frac{2l}{\pi t_0}, \quad (59,23)$$

so daß gemäß (59,22) und (59,21)

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial y} = V t_0 \alpha_1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{du}{dy} = \frac{4 \alpha_1 V}{\pi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \quad (59,24)$$

wird. Bezeichnen wir dann die längs g^* ($-\lambda \leq w \leq +\lambda$) aufgeschlitzte UW -Ebene mit B^* , so stellt $\varphi(u, w)$ eine in B^* reguläre Potentialfunktion dar, die längs g^* der aus (59,2) durch Eintragung von (59,22) und (59,24) hervorgehenden Randbedingung

$$\varphi(+0, w) = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)_{u=0} \quad (59,25)$$

genügen muß.

Um das hierdurch gekennzeichnete Randwertproblem zu erledigen, wird jetzt die UW -Ebene durch den Ansatz $\sigma = u + i \cdot w$ zur Gaußschen Zahlenebene der komplexen Variablen σ gemacht, und das Schlitzgebiet B^* durch eine passend gewählte analytische Funktion

$$\zeta^* = f(\sigma) \quad (59,3)$$

auf das Außengebiet κ'_0 des Einheitskreises k_0 der Z^* -Ebene ($\zeta^* = \xi^* + i\eta^*$) abgebildet.¹⁾ Denkt man sich ferner die analytische Funktion

$$\varphi(u, w) + i \cdot \psi(u, w),$$

¹⁾ Dies bewirkt die Funktion

$$\zeta^* = f(\sigma) = \frac{i}{\lambda} \cdot \left\{ \sqrt{\sigma^2 + \lambda^2} - \sigma \right\},$$

wovon man sich sofort überzeugt, indem man die beiden leicht zu überblickenden Abbildungen

$$\sigma^* = -\frac{2i}{\lambda} \cdot \sigma$$

und

$$\sigma^* = \zeta^* + \frac{1}{\zeta^*} \text{ bzw. } \zeta^* = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \sigma^* + \sqrt{\sigma^{*2} - 4} \right\}$$

(in Bezug auf letztere vgl. § 20) hintereinander ausführt.

wobei unter $\psi(u, w)$ die zu $\varphi(u, w)$ konjugierte Potentialfunktion zu verstehen ist, durch Vermittelung der Funktion (59,3) in das Gebiet κ'_0 der Z^* -Ebene übertragen, so läuft das zu lösende Problem auf eine gemischte Randwertaufgabe für eine in κ'_0 reguläre Potentialfunktion $\bar{\varphi}(\xi^*, \eta^*)$ hinaus, und die Lösbarkeit einer solchen Aufgabe ist auf Grund potential-theoretischer Ergebnisse sichergestellt.¹⁾ Nun läßt sich die Funktion $\bar{\varphi}(\xi^*, \eta^*)$ nach Einführung ebener Polarkoordinaten durch

$$\zeta^* = \xi^* + i \cdot \eta^* = \varrho \cdot (\cos \vartheta + i \cdot \sin \vartheta)$$

in eine Reihe von der Form

$$\bar{\varphi}(\xi^*, \eta^*) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left\{ \frac{a_{\mu}}{\varrho^{\mu}} \cdot \cos(\mu \cdot \vartheta) + \frac{b_{\mu}}{\varrho^{\mu}} \cdot \sin(\mu \cdot \vartheta) \right\} \quad (59,31)$$

entwickeln²⁾, die man mit praktisch ausreichender Genauigkeit nach einer endlichen Anzahl m von Gliedern abbrechen kann. Die derart modifizierte Funktion $\bar{\varphi}(\xi^*, \eta^*)$ wird alsdann durch die Forderung festgelegt, daß die auf die neuen Koordinaten $\varrho = 1$ und $0 \leq \vartheta < 2\pi$ umgerechnete Randbedingung (59,25), wenn auch nicht an sämtlichen, so doch wenigstens an $2m$ äquidistanten Stellen des Einheitskreises k_0 erfüllt sein soll. Auf diese Weise erhält man nämlich ein System von $2m$ linearen Gleichungen, aus dem die unbekannten Koeffizienten a_{μ} und b_{μ} ($\mu = 1, 2, \dots, m$) der Reihe (59,31) berechnet werden können, womit nach Wiedereinführung der ursprünglichen Koordinaten y und z die gesuchte Potentialfunktion $\varphi^*(y, z)$ mit praktisch zulässiger Annäherung aufgefunden ist.

§ 60. Schlußbemerkungen.

In der flugtechnischen Praxis pflegt man für den Auftrieb A und den Widerstand W einer Tragfläche die beiden Ansätze

$$A = c_a \cdot q \cdot F \quad (60,1)$$

und

$$W = c_w \cdot q \cdot F \quad (60,11)$$

zu benutzen, in denen F den Flächeninhalt der größten Projektionsfläche des Flügels mißt, während unter q der in (12,42) eingeführte Staudruck

$$q = \frac{1}{2} \varrho V^2 \quad (60,12)$$

zu verstehen ist. Die dimensionslosen Koeffizienten c_a und c_w ³⁾ hängen dann natürlich zunächst sehr wesentlich von der Profilform und der Umrißgestalt der Tragfläche ab; überdies aber sind sie als Funktionen des Anstellwinkels α anzusehen, der die Neigung der Profilschne gegen die

¹⁾ Vgl. z. B. L. Lichtenstein, Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung (Encyklopädie d. math. Wiss. Bd. II, 3. Teil, Art. C. 3), Abschnitt 29.

²⁾ Vgl. z. B. W. Sternberg, Potentialtheorie I (Sammlung Götschen Nr. 901), § 19.

³⁾ In der Praxis als *Auftriebs-* bzw. *Widerstandsbeiwert* bezeichnet.

Richtung der Flugbewegung angibt. Den auf diese Weise für einen bestimmten Flügel durch α vermittelten Zusammenhang zwischen c_a und c_w bringt man dadurch zur Darstellung, daß man in einem ebenen rechtwinkligen Achsenkreuz die Werte von c_w als Abszissen und die Werte von c_a als Ordinaten aufträgt, wobei gewöhnlich der Maßstab für c_w fünfmal so groß gewählt wird als der Maßstab für c_a . Der jeweils zugehörige Wert des Anstellwinkels α wird in einem derartigen *Polardiagramm* entweder

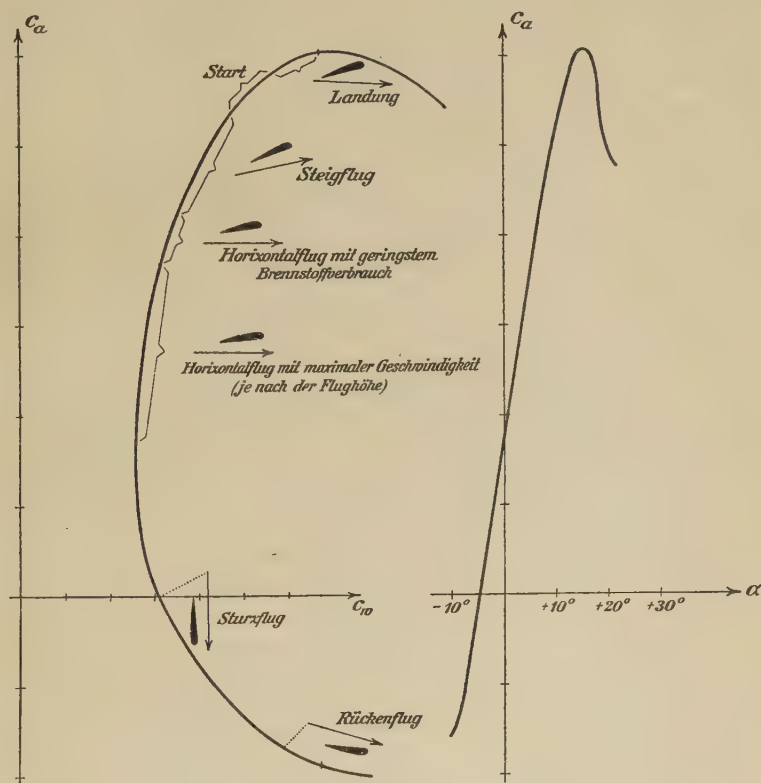


Fig. 81.

durch Anschreiben an einzelne Kurvenpunkte oder aber durch Hinzufügung einer α -Kurve kenntlich gemacht. Letzteres ist z. B. in Fig. 81 geschehen, die den hier nicht näher zu behandelnden Zusammenhang zwischen dem Polardiagramm und dem Flugzustand einer Tragfläche anschaulich erläutern soll.

In Bezug auf den Widerstand W ist zu bemerken, daß sich derselbe aus zwei Bestandteilen zusammensetzt, die völlig verschiedenen Ursprungs sind. Der eine, an Größe weitaus überwiegende von ihnen ist der

durch die *Prandtl'sche* Tragflügeltheorie erfaßte *induzierte Widerstand*, dessen Entstehung aufs innigste mit der Ablösung eines Wirbelbandes von der Flügelhinterkante verbunden ist. Der zweite Bestandteil hingegen, der als *Profilwiderstand* bezeichnet wird, rührt im wesentlichen von der Oberflächenreibung der unmittelbar an dem Flügel vorbeiziehenden Luftschichten her; seine Größe wird, wie experimentell gefunden wurde, fast ausschließlich durch die Profilform bedingt, während sie von dem Seitenverhältnis der Tragfläche, d. h. dem Quotienten $\frac{F}{l^2}$, praktisch unabhängig ist. Demnach haben wir für den *Gesamtwiderstand* W einer Tragfläche

$$W = c_{w_i} \cdot q \cdot F + W_f \quad (60,2)$$

zu schreiben, falls W_f den Profilwiderstand bedeutet, und falls in Analogie zu (60,11) für den induzierten Widerstand W_i der Ansatz

$$W_i = c_{w_i} \cdot q \cdot F \quad (60,21)$$

gemacht wird.

Um nunmehr die vorstehenden Formeln der Praxis mit den Ergebnissen der Theorie in Zusammenhang zu bringen, wollen wir den Fall eines Flügels mit elliptischer Zirkulationsverteilung wählen, den wir in § 57 behandelt und von dem wir in § 58 bewiesen haben, daß er bei vorgeschriebener Größe des Auftriebs A den kleinsten induzierten Widerstand W_i liefert. Dann ist gemäß (57,51) unter Verwendung der in diesem Paragraphen eingeführten Bezeichnungsweise

$$W_i = \frac{2 A^2}{\pi \rho V^2 l^2} \quad (60,3)$$

zu setzen, woraus gemäß (60,21) und (60,1)

$$c_{w_i} \cdot q \cdot F = \frac{2 c_a^2 q^2 F^2}{\pi \rho V^2 l^2}$$

oder unter Beachtung von (60,12)

$$c_{w_i} = \frac{c_a^2}{\pi} \cdot \frac{F}{l^2} \quad (60,31)$$

folgt. Für den Gesamtwiderstand W ergibt sich daher gemäß (60,2) der Ausdruck

$$W = \frac{c_a^2}{\pi} \cdot \frac{q \cdot F^2}{l^2} + W_f, \quad (60,4)$$

in dem die Größe W_f durch Messung des reinen Oberflächenreibungswiderstandes experimentell gesondert bestimmt werden kann.

Die oben bereits hervorgehobene Tatsache, daß W_f lediglich von der Profilform, nicht aber auch von dem Seitenverhältnis $\frac{F}{l^2}$ einer Tragfläche abhängig ist, läßt sich dazu benutzen, um bei geometrisch ähnlichen Profilen das für ein bestimmtes Seitenverhältnis $\frac{F_1}{l_1^2}$ ermittelte Polardiagramm auf ein anderes Seitenverhältnis $\frac{F_2}{l_2^2}$ umzurechnen. Gemäß (60,4) und (60,11) muß dann nämlich für ein konstant gedachtes c_a sowohl

$$\frac{W_f}{q \cdot F} = c_{w_1} - \frac{c_a^2}{\pi} \cdot \frac{F_1}{l_1^2}$$

als auch

$$\frac{W_f}{q \cdot F} = c_{w_2} - \frac{c_a^2}{\pi} \cdot \frac{F_2}{l_2^2}$$

gelten, woraus die zur Bewerkstelligung der gewünschten Umformung brauchbare Beziehung

$$c_{w_2} = c_{w_1} - \frac{c_a^2}{\pi} \cdot \left\{ \frac{F_1}{l_1^2} - \frac{F_2}{l_2^2} \right\} \quad (60,5)$$

folgt. Die analoge Relation

$$\alpha_1^{(2)} = \alpha_1^{(1)} - \frac{c_a}{\pi} \cdot \left\{ \frac{F_1}{l_1^2} - \frac{F_2}{l_2^2} \right\} \quad (60,6)$$

für die wirksamen Anstellwinkel $\alpha_1^{(1)}$ und $\alpha_1^{(2)}$ wird erhalten, indem man gemäß (56,2)

$$\alpha_1^{(1)}(z) - \frac{u_0^{(1)}(z)}{V} = \alpha_1^{(2)}(z) - \frac{u_0^{(2)}(z)}{V}$$

setzt und beachtet, daß hierin gemäß (57,3) mit Benutzung von (57,4), (60,1) und (60,12)

$$\frac{u_0^{(1)}(z)}{V} = \frac{J_0}{2l_1 V} = \frac{4c_a q F_1}{2l_1^2 V^2 \pi q} = \frac{c_a}{\pi} \cdot \frac{F_1}{l_1^2}$$

sowie in entsprechender Weise

$$\frac{u_0^{(2)}(z)}{V} = \frac{c_a}{\pi} \cdot \frac{F_2}{l_2^2}$$

zu wählen ist.

Die Formeln (60,4), (60,5) und (60,6) sind durch Messungen in der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen experimentell geprüft und in vorzüglicher Übereinstimmung mit der Erfahrung befunden worden.¹⁾

¹⁾ Vgl. C. Wieselsberger, Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik in Innsbruck 1922 (Berlin 1924), S. 47.

Insbesondere hat sich dabei gezeigt, daß die Gültigkeit dieser Formeln im großen und ganzen bestehen bleibt, falls man zu Flügeln mit nicht-elliptischen Umrißformen übergeht. Diese Tatsache weist darauf hin, daß auch bei nicht-elliptischen Flügelumrissen eine wenigstens angenähert als elliptisch anzusprechende Zirkulationsverteilung zur Ausbildung gelangt.

In physikalischer Hinsicht bedarf unsere Darstellung der Aerodynamik des Fluges noch einer ganz wesentlichen Ergänzung. Denn die klassische Wirbeltheorie, deren Elemente wir im vorhergehenden Kapitel dargelegt haben, vermag ja auf die Frage nach der Entstehung von Wirbeln in einer idealen Flüssigkeit keine Antwort zu geben, womit natürlich aufs engste der Umstand zusammenhängt, daß in der Theorie der ebenen Profilströmungen das Auftreten einer von Null verschiedenen Zirkulationskonstanten physikalisch nicht zu deuten war. Hier greift jetzt in grundlegender Weise die *Prandtl'sche Grenzschichtentheorie* ein, in der eine Flüssigkeit mit so kleiner Reibung untersucht wird, daß man diese Reibung überall dort vernachlässigen darf, wo keine großen Geschwindigkeitsunterschiede wirksam sind. Denken wir uns nun einen festen Körper in eine derartige Strömung eingetaucht, so wird die Flüssigkeit die Körperoberfläche benetzen und haften bleiben; ihre Geschwindigkeit wird also an dieser Fläche den Wert Null besitzen, um von dort aus in einer Schicht von verhältnismäßig geringfügiger Dicke sehr rasch bis zum vollen Betrag der eigentlichen Strömungsgeschwindigkeit anzuwachsen. In der hierdurch gekennzeichneten *Grenzschicht* spielen sich dann unter dem Einfluß der Reibung Vorgänge ab, die, wie sich zeigen läßt¹⁾, zur Aussendung von Wirbeln in die freie Flüssigkeit führen. Wenngleich die wirkliche Struktur der so entstehenden Wirbelgebilde erhebliche Abweichungen gegenüber der Gestalt des in § 53 eingeführten Wirbelbandes aufweisen muß, so wird dadurch doch nicht im mindesten das große Verdienst von *L. Prandtl* beeinträchtigt, durch seine Tragflügeltheorie in Verbindung mit seiner Grenzschichtentheorie eine hydrodynamische Theorie des Fluges geschaffen zu haben, die mit der Erfahrung vortrefflich im Einklang steht.

¹⁾ In Bezug auf die Einzelheiten muß hier auf die nachstehenden Arbeiten verwiesen werden: *L. Prandtl*, Verhandl. des III. intern. Math. Kongreß in Heidelberg 1904 (Leipzig 1905), S. 484; *H. Blasius*, Diss. Göttingen 1907; *E. Boltze*, Diss. Göttingen 1908; *K. Hiemenz*, Diss. Göttingen 1911; *K. Pohlhausen*, Zs. f. ang. Math. u. Mech. Bd. 1, S. 252, 1921; *L. Prandtl*, Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik in Innsbruck 1922 (Berlin 1924), S. 18.

Literaturhinweise.

Eine äußerst reichhaltige, übersichtlich geordnete Zusammenstellung einschlägiger Originalarbeiten findet sich am Schluß des von *E. Everling* verfaßten Artikels „Luftkräfte an Fahrzeugen“ im Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik Bd. VI (Leipzig 1928). Zahlreiche Literaturangaben sind auch in dem von *L. Prandtl* und seinen Mitarbeitern herausgegebenen Lieferungswerk „Ergebnisse der aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen“ enthalten, von dem bisher drei Hefte erschienen sind (München und Berlin 1921, 1923, 1927). Ferner sei auf den von *A. Betz* verfaßten Artikel „Tragflügel und hydraulische Maschinen“ im Handbuch der Physik Bd. 7, Kap. 4 (Berlin 1927) hingewiesen.

An zusammenfassenden Darstellungen in Buchform nennen wir die folgenden:

R. Fuchs und L. Hopf, Aerodynamik (Berlin 1922).

H. Glauert, The elements of aerofoil and airscrew theory (Cambridge 1926).

R. Grammel, Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges (Braunschweig 1917).

N. Joukowski, Aérodyamique (Paris 1916).

W. Müller, Mathematische Strömungslehre (Berlin 1928).

M. Roy, Sur la théorie des surfaces portantes (Paris 1922).

M. Roy, Sur l'aérodynamique des ailes sustentatrices et des hélices (Paris 1928).

Register.

- Abbildungssätze 72ff., 95ff., 99ff., 106ff.
Abwärtsgeschwindigkeit am Tragflügel 233, 240, 245, 248.
Aequipotentiallinien 64.
Aerodynamik 2.
d'Alembertsches Paradoxon 54ff.
d'Alembertsches Prinzip 21.
Analytische Funktionen 70ff.
Anstellwinkel 59.
Anstellwinkel, wirksamer 138.
Auftrieb 1, 59, 135ff., 138, 234ff., 250.
Auftrieb spezieller Profile 155, 159, 166, 173ff., 177, 180.
Auftrieb vorgegebener Profile 185ff.
Auftriebsbeiwert 250.
Auftriebsparabel 140.
Auftriebsverteilung 235.
Ausweichströmung 122.
- Bernoullische Gleichung 44, 60.
Bieberbachsche Abbildungssätze 99ff.
Biot-Savartsches Gesetz 206.
Blasiussche Formeln 132ff.
- Cauchysche Integralformeln 70, 84.
Cauchyscher Integralsatz 70.
Cauchysche Relationen 37, 192.
Cauchyscher Residuensatz 72.
Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen 63, 70.
- Deformierbarer Körper 2.
Dichte 3, 5.
Dilatation 34.
Druck 14.
Druckpunkt 59, 137, 140.
Druckpunktswanderung 159ff.
- Elastizitätstheorie 2.
Elliptische Zirkulationsverteilung 238ff., 247, 252ff.
Eulersche Bewegungsgleichungen 21ff. 43ff., 60.
- Faber-Bieberbachscher Flächensatz 106ff.
Flächenkräfte 5ff.
Flugzustand und Polardiagramm 251.
Flüssigkeiten 2ff., 5ff.
Flüssigkeitsteilchen 14, 19ff., 30ff.
Fluß durch eine Fläche 17.
- Gaußscher Integralsatz 16.
Gesamtwiderstand 252.
Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit 14ff.
Geschwindigkeitsfeld eines Wirbelfadens 204ff., 216ff.
Geschwindigkeitsfeld einer Wirbelschicht 211ff., 218ff., 224ff.
Geschwindigkeitsfeld eines Wirbelsystems 198ff., 215ff.
Geschwindigkeitskomponenten 15.
Geschwindigkeitspotential 38ff., 60ff., 111ff.
Grenzschicht 254.
- Hauptaufgaben der Tragflügeltheorie 153ff., 236ff.
Homogenität 5.
Hydrodynamik 2.
- Ideale Flüssigkeit 5ff.
Induzierter Widerstand 235, 252.
Inkompressibilität 5.
Isotropie 5.

Joukowskische Profile 161ff.

v. Kármán-Trefftzsche Profile 176ff.

Komplexes Geschwindigkeitspotential
111ff., 117, 120, 125ff.

Komplexe Strömungsgeschwindigkeit
111ff.

Kompressibilität 4.

Konforme Abbildung 72ff., 95ff., 99ff.,
106ff.

Konform belegte Profilkontur 143ff.,
148.

Konformer Schwerpunkt 143.

Kontinuierlich verbreitete Materie 2.

Kontinuitätsgleichung 17, 27ff., 60.

Kreisbogenprofile 156ff.

Kreisbogenzweiecksabbildung 170ff.

Kreiskonturströmung 118ff., 121ff.,
127ff.

Kreuzungspunkt 74.

Kugelkörperströmung 50ff.

Kutta-Joukowskischer Satz 134ff.

Lagrangesche Bewegungsgleichungen
26ff.

Lagrangesches Theorem 35.

Laplacesche Differentialgleichung 46,
60, 64, 70.

Lejeune-Dirichletsche Transformati-
onsformel 214.

Logarithmisches Potential 215.

Lokale Betrachtungsweise 19ff.

Luftkräfte 1, 135, 233.

Massenkräfte 8, 21, 24.

v. Misessches Profilerzeugungsverfah-
ren 178ff.

v. Misessche Theorie der Profilpara-
meter 138ff., 147ff.

Moment des Auftriebs 136ff., 138ff.

Newtonsches Potential 202.

Niveaulinien 64.

Normalspannungen 7, 11, 14.

Nullstellen einer Funktion 72, 80, 84.

Öffnung einer Profilecke 59.

Poissonsche Differentialgleichung 202.

Poissonsche Integralformel 88ff.

Pol einer Funktion 71ff., 80, 84.

Polardiagramm 251.

Potentialfunktionen 46.

Potentialströmungen 38ff., 60ff., 111ff.

Prandtlsche Tragflügeltheorie 221ff.

Prandtlsche Grenzschichtentheorie
254.

Profil 59.

Profilachsen 138, 145.

Profilbrennpunkt 139, 148, 150ff.

Profildurchmesser, größter 148ff.,
236ff.

Profilecke 59.

Profilgrundkreis 137, 149ff.

Profilkontur 59.

Profilmittelpunkt 137, 140ff., 148.

Profilparameter 147ff.

Profilsehne 59.

Profilspitze 59.

Profilströmung 125ff.

Profilwiderstand 252.

Quellen 16.

Quellenfreie Strömungen 16.

Randbedingungen 25.

Randwertprobleme 25ff., 88ff., 238,
249ff.

Randwertprobleme, aerodynamische
46ff., 64ff., 113ff.

Rechteckiger Tragflügel 247ff.

Regularität im Unendlichen 50, 69,
80ff.

Reibungslosigkeit 7.

Reihenentwicklungen 71, 80ff., 250.

Residuum 71.

Riemannscher Abbildungssatz 96.

Riemannsche Flächen 75.

Rotation 33.

Schlichte Gebiete 75.

Schubspannungen 7.

Senken 16.

Sichelflächenprofile 167ff.

Spannungen 6ff.

Spannungskomponenten 11ff.

- Spannungszustand 7ff., 12ff.
 Spannweite 58.
 Stationäre Strömungen 15.
 Staudruck 45, 250.
 Staupunkte 44, 124ff., 131.
 Stokesscher Integralsatz 18.
 Streckenprofile 154ff.
 Stromfäden 15.
 Stromfunktion 62ff.
 Stromlinien 15, 42, 62ff., 121ff.
 Stromröhren 15.
 Strömungen 14ff.
 Strömungen, ebene 59ff., 214ff.
 Strömungsgeschwindigkeit 14, 111.
 Substantielle Betrachtungsweise 19ff.

 Tangentialspannungen 7, 11, 13.
 Tragende Linie 223.
 Tragfläche, unendlich breite 58.
 Tragfläche kleinsten Widerstandes 241ff.
 Translation 33.

 Übertragung von Funktionen 79, 126.
 Unstetigkeitsflächen der Strömungs-
 geschwindigkeit 211, 220, 223.

 Webersche Transformation 29.
 Widerstand I, 59, 234ff., 241ff., 251ff.
 Widerstandsbeiwert 251.
 Widerstandsverteilung 235.
 Windungspunkt 75.
 Wirbel 37, 192ff.
 Wirbel, gebundene 222.
 Wirbelband einer Tragfläche 222ff.
 Wirbelfäden 194ff.
 Wirbelfäden, geradlinige 214ff.
 Wirbelfreie Strömungen 37ff., 60ff.
 Wirbellinien 194.
 Wirbelringe 199.
 Wirbelröhren 194.
 Wirbelschichten 210ff., 218ff.
 Wirbelstärke 197.

 Zirkulation 18, 40ff., 61ff.
 Zirkulationskonstante 62, 67, 129ff.
 Zirkulationsstärke eines Wirbelfadens 197, 217.
 Zirkulationsströmung 123.
 Zirkulationsverteilung 222, 232, 237, 238ff.
 Zusammenhang von Gebieten 38ff.
 Zweig einer Funktion 76.

Mathematische Literatur in Auswahl

Frühjahr



1929

VERLAG WALTER DE GRUYTER & CO. / BERLIN W 10 UND LEIPZIG

Journal für die reine und angewandte Mathematik. Gegründet von A. L. CRELLE 1826. Herausgegeben von K. HENSEL, H. HASSE, L. SCHLESINGER. Wissenschaftlicher Beirat: H. Brandt, M. Dehn, G. Doetsch, A. Fraenkel, O. Haupt, F. Hausdorff, E. Hellinger, G. Kowalewski, H. Rademacher, K. Reidemeister, A. Rosenthal, C. Schaefer, W. Schmeidler, F. Schottky, O. Toeplitz. Band 1—140 Preise auf Anfrage, Band 141—144 je 16.—, Band 145—147 je 12.—, Band 148—151 je 10.—, Band 152 12.—, Band 153 17.50, Band 154 30.—, Band 155—156 je 36.—, Band 157 u. 158 (Jubiläumsband I/II), Band 159 u. 160 je 36.—

Das von A. L. Crelle gegründete „Journal für die reine und angewandte Mathematik“ darf auf eine über hundertjährige ruhmvolle Vergangenheit zurückblicken. Seit seiner Gründung im Jahre 1826 wurde es der Sammelplatz für die Arbeiten der großen Männer, welche seit dieser Zeit der Mathematik einen neuen Aufschwung gaben.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Gegründet von KARL OHRTMANN und FELIX MÜLLER, fortgeführt von EMILLAMPE. Im Verein mit anderen Mathematikern und unter besonderer Mitwirkung von H. Hahn, E. Hecke, G. Herglotz, O. Hölder, A. Loewy, L. Neder, O. Perron, E. Salkowski, G. Szegő, A. Wangerin, H. Weyl herausgegeben von LEON LICHTENSTEIN. Band 1—49: Jahrgang 1868—1923. Band 1—44 Preise auf Anfrage, Band 45 75.—, Band 46: 92.—, Band 47: 74.—, Band 48: 121.—, Band 49 Heft 1 u. 2 je 22.—, Heft 3: 15.—, Heft 4: 18.—

Das „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik“ bringt eingehende Besprechungen sämtlicher periodischen und nichtperiodischen Neuerscheinungen auf dem Gebiete der reinen Mathematik, Mechanik, Relativitätstheorie, Astronomie und mathematischen Physik. Auch die Geschichte und Philosophie der Mathematik wie die Fragen der Didaktik finden sorgfältige Berücksichtigung.

Geschichte der Mathematik. Von Oberstud.-Dir. Dr. H. WIELEITNER. 2 Bde. (Samml. Göschen Nr. 226, 875.) Geb. je 1.50

„Zum erstenmal ist hier in deutscher Sprache eine zusammenhängende Darstellung der Geschichte der Mathematik versucht worden. Trotz des engen Raumes ist sie durchaus lesbar und keineswegs eine bloße Aufzählung.“ Deutsches Philologen-Blatt.

Geschichte der Mathematik. I. Teil: Von den ältesten Zeiten bis Cartesius. Von Professor Dr. S. GÜNTHER in München. Mit 56 Figuren. VIII, 428 Seiten. Neudruck 1927. (Sammlung Schubert Bd. 18.) Geb. 17.40

II. Teil: Von Cartesius bis zur Wende des 18. Jahrhunderts. Von Oberstudien-
direktor Dr. H. WIELEITNER in München. 1. Hälfte: Arithmetik, Algebra,
Analysis. Mit 6 Figuren. VIII, 251 Seiten. 1911. (Sammlung Schubert Bd. 63.)
Geb. 8.40. 2. Hälfte: Geometrie und Trigonometrie. Mit 13 Fig. VI, 222 Seiten.
1921. (Sammlung Schubert Bd. 64.) Geb. 3.50

„Es zeigt sich auch in diesem Buche wieder die große Meisterschaft des Verfassers in der zielbewußten Auswahl und klaren, anregenden Darstellung eines großen Stoffes, die auch seine anderen größeren Kompendien auszeichnet.“ Monatshefte für Mathematik und Physik.

Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. Von Professor Dr. JOHANNES TROPFKE, Direktor der Kirschner-Oberrealschule zu Berlin. Zweite, verbesserte und sehr vermehrte Auflage. Lex.-Oktav.

Band 1: Rechnen. VII, 177 Seiten. 1921. 7.20, geb. 8.20
Band 2: Allgemeine Arithmetik. IV, 221 Seiten. 1921. 8.50, geb. 9.50

- Band 3: Proportionen, Gleichungen. IV, 151 Seiten. 1922. 6.—, geb. 7.—
 Band 4: Ebene Geometrie. IV, 240 Seiten. 1922. 9.—, geb. 10.—
 Band 5: I. Ebene Trigonometrie. II. Sphärik und sphärische Trigonometrie. IV, 185 Seiten. 1923. 7.50, geb. 8.50
 Band 6: Analysis, Analytische Geometrie. IV, 169 Seiten. 1924. 7.—, geb. 8.—
 Band 7: Stereometrie. Verzeichnisse. V, 128 Seiten. 1924. 6.50, geb. 7.50

„Dem Verfasser gebührt unser Dank für sein die neuesten Ergebnisse historischer Forschungen berücksichtigendes, durch Vollständigkeit und Klarheit sich auszeichnendes Werk. Es verdient seinen Platz im Bücherschrank eines jeden Mathematikers.“ [Naturwissenschaften.]

Mathematische Forschung in den letzten 20 Jahren. Rede, gehalten am 31. Januar 1921 vor der Mathematischen Gesellschaft Benares von deren Vorsitzendem GANESH PRASAD. Aus dem Englischen übersetzt von Dr. FRIEDRICH LANGE. Groß-Oktav. 37 Seiten. 1923. 0.80

In leichtverständlicher Darstellung berichtet der Verfasser über den Aufbau der Theorie der Integralgleichungen und ihre Anwendungen, die Erforschung der Grundlagen der mathematischen Physik, die Verallgemeinerung des Begriffs der konvergenten Reihen und die Entwicklung der modernen Relativitätstheorie.

Neue Rechentafeln. Für Multiplikation und Division mit allen ein- bis vierstelligen Zahlen. Herausgegeben von Professor Dr. J. PETERS, Observator am astronomischen Recheninstitut. Folio-Format. VI, 378 Seiten. 1909. Geb. 20.—
 Diese Rechentafeln von Peters sind ebenfalls in französischer wie englischer Ausgabe zu haben. Je geb. 20.—

Dr. A. L. Crelles Rechentafeln, welche alles Multiplizieren und Dividieren mit Zahlen unter Tausend ganz ersparen, bei größeren Zahlen aber die Rechnung erleichtern und sicherer machen. Neue Ausgabe. Besorgt von O. SEELIGER. Mit Tafeln der Quadrat- und Kubikzahlen von 1—1000. VII, 378 Seiten. Folio. 1923. Geb. 20.—
 Diese Rechentafeln von Crelle liegen auch in französischer wie englischer Ausgabe vor. Je geb. 20.—

Fünfstellige Logarithmen. Mit mehreren graphischen Rechentafeln und häufig vorkommenden Zahlwerten. Von Regierungsrat Professor A. ADLER. Neudruck. 116 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 423.) Geb. 1.50

Der Band enthält die gemeinen Logarithmen der ganzen Zahlen bis 1000, die der goniometrischen Funktionen, die wirklichen Werte dieser Funktionen und die Reihe von mathematischen, physikalischen und astronomischen Hilfstafeln, wie sie fünfstelligen Logarithmentafeln gewöhnlich beigegeben sind.

Fünfstellige Logarithmentafeln der trigonometrischen Funktionen für jede Zeitssekunde des Quadranten. Herausgegeben von Prof. Dr. J. PETERS, Observator am Astronomischen Recheninstitut. Lex.-Oktav. IV, 82 Seiten. 1912. 6.—, geb. 7.—

In den vorliegenden Tafeln bietet der Herausgeber, unter Benützung des wertvollen Materials, das ihm als Resultat der mit J. Bauschinger ausgeführten Bearbeitung der 8 stelligen Tafeln der trigonometrischen Funktionen zur Verfügung stand, der rechnenden Astronomie ein Hilfsmittel von großem Nutzen.

Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Von Professor Dr. E. F. AUGUST, weiland Direktor des Köllnischen Realgymnasiums, Berlin. Achtundvierzigste Auflage in der Bearbeitung von Dr. F. AUGUST, weiland Prof. a. d. Artillerie- u. Ingenieur-Schule, Berlin. Oktav. VII, 204 S. 1927. Geb. 2.—

„Die Anordnungen des Zahlenmaterials in den Tafeln, der klare Druck, handliches Format und gediegene Ausstattung empfehlen das Buch allein.“ Allgemeine Vermessungs-Nachrichten.

Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen in zwei Farben zusammengestellt. Von Professor Dr. HERMANN SCHUBERT. Neue Ausgabe von Dr. ROBERT HAUSSNER, o. ö. Professor an der Universität Jena. 175 Seiten. Neudruck 1926. (Samml. Göschen Bd. 81.)

Geb. 1.50

„Die vierstelligen Logarithmen sind in der Form recht handlich und gefällig. Besonders zu empfehlen sind die Tafeln für Schauen, wo es von Vorteil ist, die Lernenden nicht mit umfangreichen Büchern zu belasten.“ Zeitschrift d. Österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins.

Vierstellige Logarithmentafeln. Von Dr. MAX ZACHARIAS, Studienrat am Vereinigten Friedrichs- und Humboldt-Gymnasium in Berlin, und Dr. PAUL METH, Studienrat a. d. Herderschule in Charlottenburg. Groß-Oktav. 44 Seiten. 1927. Geb. 1.50

„Diese Logarithmentafel zeichnet sich durch übersichtliche Anordnung und Reichtum des Gebotenen aus.“
Deutsche Schulzeitung in Polen.

Logarithmische Rechentafeln für Chemiker, Pharmazeuten, Mediziner und Physiker. Gegründet von Professor Dr. F. W. KÜSTER †. Für den Gebrauch im Unterrichtslaboratorium und in der Praxis berechnet sowie mit Erläuterungen versehen. Nach dem gegenwärtigen Stande der Forschung bearbeitet von Dr. A. THIEL, o. ö. Professor der physikalischen Chemie, Direktor des Physik.-Chem. Instituts der Universität Marburg. Dreißigste bis vierunddreißigste, verbesserte und vermehrte Auflage. Oktav. 148 Seiten und eine Tafel. 1925. Geb. 6.—

„Die wohl allseitig bekannten Küsterschen Rechentafeln sind dem Chemiker, der sich ihrer einmal bedient hat, zum ungern entbehrten Werkzeug geworden, das sich in seiner bewährten Anordnung des Stoffes zu einem wirklich nützlichen und fast notwendigen Hilfsbuch entwickelt hat. Die Neuauflage erscheint wie üblich nach dem neuesten Stande der Forschung.“

Zeitschrift für angewandte Chemie.

Fünfstellige Tafeln der Kreis- und Hyperbelfunktionen sowie der Funktionen e^x und e^{-x} mit den natürlichen Zahlen als Argument. Von Dr.-Ing. HEIICHI HAYASHI, Professor an der Kaiserlichen Kyushu-Universität Fukuoka-Hakosaki, Japan. Oktav. IV, 182 Seiten. Neudruck 1928. 9.—

„Der bekannte japanische Verfasser hat aus der Notwendigkeit, die Werte beider Funktionsarten gleichzeitig zur Verfügung zu haben, Tafeln berechnet, in denen nicht nur die Hyperbelfunktionen, sondern auch die Kreisfunktionen mit verschieden großen Abstufungen, auf fünf Dezimalstellen angewendet sind. Die Anordnung dieser Tafeln ist äußerst praktisch, Druck und Papier sind ausgezeichnet, so daß die Benutzung sich bequem und einfach gestaltet. Für alle, die zahlenmäßige Rechnungen mit den genannten Funktionen häufiger auszuführen haben, ist der Gebrauch der Tafeln als praktisch und zeitsparend zu empfehlen.“

Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure.

Tafeln der Funktionen Cosinus und Sinus mit den natürlichen sowohl reellen als rein imaginären Zahlen als Argument. (Kreis- und Hyperbelfunktionen.) Von Dr. CARL BURRAU. Vorwort in deutscher, französischer und englischer Sprache. Oktav. XX, 63 Seiten. 1907. Geb. 4.—

Hauptsätze der Elementar-Mathematik zum Gebrauch an höheren Lehranstalten. Von Dr. F. G. MEHLER. Neu bearbeitet von Oberstudiendirektor A. SCHULTE-TIGGES. Oktav.

Ausgabe A. 31. Auflage des Stammbuches. Mit 107 Figuren im Text und auf 1 Tafel. XII, 280 Seiten. 1921. 2.80

Ausgabe B mit Übungen. Unterstufe. 13. Auflage. Mit 6 Tafeln. IX, 223 Seiten. 1927. 2.80

Ausgabe B ohne Übungen. 12. Auflage. (Sonst wie die vorige.) Unterstufe. Mit 3 Tafeln. 166 Seiten. 1923. 1.80

Oberstufe. 8. Auflage. Mit 6 Tafeln. VII, 254 Seiten. 1925. 4.—

Geometrische Aufgaben und Übungen (aus der Ausgabe B). Unterstufe. Mit 2 Tafeln. 58 Seiten. 1923. 0.60

Oberstufe. 89 Seiten. 1925. 1.50

Hierzu sind erschienen:

Vierstellige Rechentafeln, für alle logarithmischen und trigonometrischen Rechnungen an höheren Schulen ausreichend. 16 Seiten. 1927. 0.20

Ferner folgende Einzelteile der Oberstufe mit Übungen:

Grundzüge und Anwendungen der Differential- und Integralrechnung mit zahlreichen Übungsaufgaben für höhere Schulen. Mit 1 Tafel. 63 Seiten. 1925. 1.—

Grundzüge der darstellenden Geometrie mit zahlreichen Übungsaufgaben für höhere Schulen. Mit 4 Tafeln. 63 Seiten. 1925. 1.50

Mathematische Formelsammlung. Von Professor O. Th. BÜRKLEN†. Vollständig umgearbeitete Neuausgabe von Dr. F. RINGLEB. 241 Seiten. Mit 36 Figuren. 1927. (Sammlung Göschens Bd. 51.) Geb. 1.50

„Eine sehr geschickt ausgewählte und recht reichhaltige Sammlung, welche wohlgeeignet ist, die Abiturienten der Gymnasien und Oberrealschulen bei den Repetitionen zu unterstützen und ihnen einen klaren Überblick über das ganze System der Elementarmathematik zu geben.“

Fortschritte der Mathematik.

Mathematische Mußestunden. Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken u. Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur. Von Professor Dr. HERMANN SCHUBERT. Vierte Auflage, neubearbeitet von Professor Dr. F. FITTING, München-Gladbach. Oktav. 245 Seiten. 1924. Geb. 6.—

„Das kleine, auch äußerlich hübsch ausgestattete Buch wird allen Lesern Freude machen, und insbesondere der Lehrer wird in ihm eine Fülle von Anregungen für den Unterricht vorfinden. Wir empfehlen die ‚Mußestunden‘ allgemeiner Beachtung.“

Zeitschrift für das Realschulwesen.

Arithmetik nebst Gleichungen 1. und 2. Grades. Von Professor Dr. HERMANN SCHUBERT. Dritte Auflage, neu bearbeitet von Professor P. B. FISCHER, Studienrat am Gymnasium zu Berlin-Steglitz. 132 Seiten. 1923. (Sammlung Göschens Bd. 47.) Geb. 1.50

Die neue Bearbeitung des vorliegenden Bandes ist durch einen Abschnitt über Kombinatorik bereichert.

Lehrbuch der Algebra. Von Dr. ALFRED LOEWY, o. Professor an der Universität in Freiburg i. Br. I. Teil: Grundlagen der Arithmetik. Groß-Oktav. VI, 398 Seiten. 1915. 12.—, geb. 13.20

Elementare Algebra. Von Professor P. B. FISCHER, Studienrat am Gymnasium in Berlin-Steglitz. Mit 20 Figuren. 149 Seiten. (Samml. Göschens Bd. 930.) Geb. 1.50

„Der erste Teil des Bandes behandelt die allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen, der zweite besondere Gleichungen und Lösungsverfahren. Dem Text sind gut gewählte Zahlenbeispiele beigegeben.“

Allgem. Vermessungs-Nachrichten.

Algebra I: Die Grundlagen. Von Dr. OSKAR PERRON, o. ö. Professor an der Universität München. Mit 4 Figuren. 1927. VIII, 307 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 8.) 10.—, geb. 11.50

Algebra II: Theorie der algebraischen Gleichungen. Von Dr. OSKAR PERRON, o. ö. Professor an der Universität München. Mit 5 Figuren. 1927. VIII, 243 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 9.) 8.—, geb. 9.50

Band I enthält die Grundbegriffe, es folgt ein Kapitel über den polynomischen und den Taylorschen Satz und der für den Ingenieur wichtige Abschnitt über Determinanten. Anschließend folgen Kapitel über symmetrische Funktionen, Teilbarkeit und über die Existenz von Wurzeln. Band II ist der Gleichungstheorie gewidmet.

Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra. Von Professor Dr. HERMANN SCHUBERT. Vierte, neubearbeitete und erweiterte Auflage von Professor P. B. FISCHER, Studienrat am Gymnasium zu Berlin-Steglitz. Mit 8 Figuren. 139 Seiten. 1922. (Samml. Göschens Bd. 48.) Geb. 1.50

Die bekannte Beispielsammlung zur Arithmetik und Algebra von H. Schubert erscheint hiermit in einer neuen Bearbeitung. Änderungen gegen die alten Auflagen sind neben unerheblichen Kürzungen und mehrfachen Verbesserungen insofern eingetreten, als die Aufgaben zur Algebra ganz erheblich erweitert wurden.

Irrationalzahlen. Von Dr. OSKAR PERRON, o. ö. Professor an der Universität München. 1921. VIII, 186 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 1.) 6.—, geb. 7.—

Inhalt: Die Grundlagen — Der Begriff der Grenze — Potenzen und Logarithmen — Verschiedene Darstellungsformen irrationaler Zahlen — Approximation irrationaler Zahlen durch rationale — Algebraische und transzendente Zahlen.

Praxis der Gleichungen. Von Dr. C. RUNGE, Professor an der Universität Göttingen. Zweite, verbesserte Auflage. Mit 8 Figuren. 1921. V, 172 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 2.) 6.—, geb. 7.—

Eine erschöpfende Darstellung der Verfahren zur numerischen Auswertung der linearen und nicht-linearen Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten. Dient das Werk auch in erster Linie den Bedürfnissen des praktischen Rechnens, so findet doch auch der Lehrer viele wertvolle Anregungen darin.

Höhere Algebra. Von Dr. HELMUT HASSE, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Halle.

I: Lineare Gleichungen. 160 Seiten. 1926. (Samml. Göschcn Bd. 931.) Geb. 1.50

II: Gleichungen höheren Grades. 160 Seiten. 1927. (Samml. Göschcn Bd. 932.) Geb. 1.50

„Es ist dem Verfasser gelungen, in engstem Rahmen das Gebäude der „allgemeinen“ Algebra vor den Augen des Lesers aufzurichten, einer Algebra, die auf dem Fundament der Definitionen der Ringe, Körper und Integritätsbereiche aufgebaut ist.“ Zeitschrift für mathem. und naturw. Unterr.

Einführung in die Axiomatik der Algebra. Von Dr. H. BECK, o. Professor an der Universität Bonn. 1926. X, 198 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 6.) 9.—, geb. 10.50

Das vorliegende Buch enthält im wesentlichen den Stoff einer an der Bonner Universität gehaltenen Anfängervorlesung; es erschöpft sich nicht in axiomatischen Dingen, sondern bringt darüber hinaus eine Reihe anderer Gebiete, die der Studierende braucht.

Einführung in die Determinantentheorie einschließlich der Fredholm'schen Determinanten. Von Dr. GERHARD KOWALEWSKI, o. Prof. an der Techn. Hochsch. in Dresden. Zweite, verk. Aufl. Gr.-Okt. IV, 304 S. 1925. 14.—, geb. 15.50

„Die Kowalewskische Darstellung des umfangreichen Gebietes zeichnet sich durch die anschauliche Kraft und Klarheit der Sprache vor anderen aus. Die Beschäftigung mit diesem Buche gewährt neben dem wissenschaftlichen Gewinn einen reichen ästhetischen Genuß.“ Schulwart.

Vektoranalysis in ihren Grundzügen und wichtigen physikalischen Anwendungen. Von Dr. ARTHUR HAAS, a. o. Professor an der Universität Wien. Mit 37 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. VI, 149 Seiten. 1922. 4.—, geb. 5.—

Das Buch stellt die Grundzüge der Vektoranalyse in engstem Zusammenhange mit ihrer Anwendung auf Mechanik, Hydrodynamik, Elektrizitätslehre und Relativitätstheorie dar.

Vektoranalysis. Von Dr. SIEGFRIED VALENTINER, Professor für Physik an der Bergakademie Clausthal. Mit 16 Figuren. Vierte, umgearbeitete Auflage. 136 Seiten. 1929. (Samml. Göschcn Bd. 354.) Geb. 1.50

Zahlentheorie. Von Dr. KURT HENSEL, o. ö. Professor an der Universität Marburg. Groß-Oktav. XII, 356 Seiten. 1913. 10.—, geb. 12.—

Grundlehren der neueren Zahlentheorie. Von Professor Dr. PAUL BACHMANN. Zweite, verbesserte Auflage. Herausgegeben von Dr. ROBERT HAUSSNER, ord. Professor an der Universität Jena. Mit 10 Figuren. 1921. XV, 246 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 3.) 8.50, geb. 9.50

Der erste Abschnitt umfaßt die klassische Theorie der rationalen Zahlen, der zweite eine Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlen, deren verschiedene Methoden am Beispiel des quadratischen Körpers zu einem harmonischen, in sich geschlossenen Bau zusammengefügt werden.

Synthetische Zahlentheorie. Von Dr. RUDOLF FUETER, o. Professor an der Universität Zürich. Zweite, verbesserte Auflage. 1925. VIII, 277 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 4.) 10.—, geb. 12.—

Die vorliegende zweite Auflage des bewährten Lehrbuches weist gegen die erste zahlreiche Änderungen und Ergänzungen auf.

Das Fermatproblem in seiner bisherigen Entwicklung. Von Professor Dr. PAUL BACHMANN. Oktav. VIII, 160 Seiten. 1919. 2.50

In der vorliegenden Abhandlung gibt der Verfasser eine Übersicht von den Beweisverfahren und den Theorien, welche Euler, Legendre, Gauß, Dirichlet, Kummer und andere Forscher in ihren Studien über das allgemeine Fermatproblem angewandt und entwickelt haben.

Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik. Eine Einführung in die Differential- und Integralrechnung und in die analytische Geometrie. Von Dr. GEORG SCHEFFERS, Geh. Regierungsrat, Prof. a. d. Techn. Hochschule Charlottenburg. Mit 438 Figuren. Sechste, verbesserte Auflage. Lexikon-Oktav. VIII, 743 Seiten. 1925. 30.—, geb. 33.—

Dieses vor allem für Studierende der Naturwissenschaften und der Technik geschriebene Lehrbuch ist in erster Linie für den Selbstunterricht bestimmt und geht daher von dem denkbar geringsten Maß von Vorkenntnissen aus: der Leser braucht nur im Buchstabenrechnen, in der Auflösung von Gleichungen ersten Grades mit einer Unbekannten und in der niederen Geometrie bewandert zu sein.

Determinanten. Von Professor Studienrat PAUL B. FISCHER. Zweite, verbesserte Auflage. Neudruck. 136 Seiten. 1921. (Samml. Göschen Bd. 402.) Geb. 1.50

Der in einer wesentlich umgearbeiteten Auflage vorliegende Band soll die Studierenden der Mathematik, Physik und technischen Wissenschaften in die Grundzüge der Determinanten einführen.

Gruppentheorie. Von Dr. LUDWIG BAUMGARTNER in München. Mit 8 Figuren. 120 Seiten. 1921. (Samml. Göschen Bd. 837.) Geb. 1.50

Elementare Reihenlehre. Von Dr. HANS FALCKENBERG, Professor an der Universität Gießen. Mit 4 Figuren im Text. 136 Seiten. 1926. (Samml. Göschen Bd. 943.) Geb. 1.50

Das Bändchen will mehr bieten als das, was in jedem Lehrbuch der Infinitesimalrechnung über unendliche Reihen enthalten ist, und fügt deshalb z. B. der Erörterung über das Cauchysche Divergenz- und Konvergenzkriterium auch solche über das Raabesche, das logarithmische und das Gauss'sche an.

Lebesguesche Integrale und Fouriersche Reihen. Von Dr. L. SCHLESINGER, o. Professor an der Universität Gießen, und Dr. A. PLESSNER. Groß-Oktav. VIII, 229 Seiten. 1926. 14.—, geb. 16.—

„Das System ist so durchgeführt, daß fast keine Vorkenntnisse gefordert und trotzdem das volle Beherrschen des Materials erzielt werden kann.“ Allgemeine Österr. Chemiker- u. Techniker-Zeitung.

Lehrbuch der Analysis. Von Professor EDOUARD GOURSAT. I. Band. Nach der zweiten Auflage des französischen Originals übersetzt von Felix James Schwarz. Mit Begleitwort von Dr. Gerhard Kowalewski, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule Dresden. Mit 53 Figuren. Groß-Oktav. XII, 592 Seiten. 1914. 12.—, geb. 13.50

Methoden der praktischen Analysis. Von Dr. FR. A. WILLERS, o. Professor an der Bergakademie Freiberg (Sachsen). 344 Seiten. 1928. (Göschens Lehrbucherei Bd. 12.) 20.—, geb. 21.50

Der Band gibt dem Mathematiker einen Einblick in die Anwendungsmöglichkeiten der Methoden und macht den Naturwissenschaftler und Ingenieur mit den theoretischen Grundlagen bekannt.

Niedere Analysis. Von Professor Dr. BENEDIKT SPORER. Mit 5 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. Sechster Abdruck. 179 Seiten. 1919. (Samml. Göschen Bd. 53.) Geb. 1.50

Ohne den wissenschaftlichen Boden zu verlassen, war es das Bestreben des Verfassers, alle Ableitungen in den verschiedenen Kapiteln dieses umfangreichen Gebietes so einfach und verständlich wie möglich darzustellen und durch Beispiele klarer zu machen.

Höhere Analysis. Von Dr. FR. JUNKER, Rektor des Realgymnasiums und der Oberrealschule in Göppingen (Württemberg). Erster Teil: Differentialrechnung. Mit 167 Übungsbeispielen und 67 Figuren im Text. Dritte, verbesserte Auflage. Neudruck. 204 Seiten. 1925. (Samml. Göschen Bd. 87.) Geb. 1.50

Zweiter Teil: Integralrechnung. Mit 50 Figuren im Text. Vierte, verbesserte Auflage. 132 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 88.) Geb. 1.50

„Die Bändchen sind eine wahre Hochschule des abstrakten Denkens, und das Werk genießt in Fachkreisen mit Recht das höchste Ansehen.“ Magazin für Pädagogik.

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung. Von Rektor Dr. FR. JUNKER. Vierte, verbesserte Auflage von Oberstudienrat Professor Dr. A. WITTING. Mit 47 Figuren im Text. 130 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Bd. 146.) Geb. 1.50

Der Band, der sich als vorzügliches Mittel zur Einübung der elementaren Sätze und Formeln der Differentialrechnung bewährt hat, erfuhr bei seiner Neuauflage eine bedeutende Verbesserung und Erweiterung.

Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung. Von Rektor Dr. FR. JUNKER. Mit 52 Figuren im Text. Dritte, verbesserte Auflage Neudruck. 135 Seiten. 1928. (Samml. Göschens Bd. 147.) Geb. 1.50.

„Die reichhaltige Aufgabensammlung ist für den Selbstunterricht sehr geeignet. Das nützliche Büchlein wird weiterhin die verdiente große Verwendung finden.“ Schweizer Pädagogische Zeitschrift.

Lehrbuch der Differentialgleichungen. Von Dr. HEINRICH LIEBMANN, o. Professor an der Universität Heidelberg. Groß-Oktav. VI, 226 Seiten. Mit 31 Figuren. 1901. 6.—, geb. 7.20

Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage. Von Dr. LUDW. SCHLESINGER, o. Professor an der Universität Gießen. Dritte, neubearbeitete Auflage. Groß-Oktav. VIII, 326 Seiten. 1922. 10.—, geb. 11.—

Es war das Bestreben des Verfassers, durch die hier gegebene Darstellung die Theorie der Differentialgleichungen auch denjenigen leichter zugänglich zu machen, die es mit den Anwendungen der Analysis zu tun haben.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Von Dr. G. HOHEISEL. 159 Seiten. 1926. (Samml. Göschens Bd. 920.) Geb. 1.50

Der Band beginnt mit einer elementar gehaltenen Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, geht aber in den späteren Teilen über die Anfangsgründe hinaus. Bei der Auswahl des Stoffes wurden Gegenstände, welche Anwendungen zulassen, bevorzugt.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Von Dr. J. HORN, o. Professor an der Technischen Hochschule Darmstadt. Zweite, völlig umgearb. Auflage. Mit 4 Figuren. 1927. VIII, 197 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 10.) 9.—, geb. 10.50

Inhalt: Elementare Integrationsmethoden, Existenzbeweise, Methode der schrittweisen Annäherung, numerische und graphische Näherungsmethoden, lineare Differentialgleichungen, elementare Integrationsmethoden und weitere Untersuchungen im reellen Gebiet, Existenzbeweise im komplexen Gebiet, Abhängigkeit der Lösungen von Parametern und Anfangswerten, Singularitäten nichtlinearer Differentialgleichungen.

Partielle Differentialgleichungen. Von Dr. G. HOHEISEL. (Samml. Göschens Nr. 1003.) Geb. 1.50

Das Buch enthält alle wichtigen Lehrsätze und Methoden für die Integration der partiellen Differentialgleichungen. Trotz der Kürze sind alle wesentlichen Ideen und Wege aufgezeigt

Mengenlehre. Von Professor Dr. E. KAMKE. Mit 6 Figuren. (Samml. Göschens Bd. 999.) Geb. 1.50

Der Band behandelt die grundlegenden Tatsachen der Mengenlehre, die für alle Zweige der Mathematik so große Bedeutung gewonnen hat. Die Definition der Menge erfolgt im Anschluß an Cantor. Besondere Vorkenntnisse werden nicht vorausgesetzt.

Mengenlehre. Von Dr. F. HAUSDORFF, o. Professor an der Universität Bonn. Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 12 Figuren. 1927. 285 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 7.) 12.—, geb. 13.50

Das Lehrbuch setzt beim Lesen keine höheren mathematischen Kenntnisse als die Anfangsgründe der Differential- und Integralrechnung, allerdings aber eine gewisse Schärfe des abstrakten Denkens voraus und wird von Studierenden in mittleren Semestern mit Erfolg gelesen werden können.

Funktionentheoretische Vorlesungen. Von HEINRICH BURKHARDT. Neu herausgegeben von Dr. GEORG FABER, o. Prof. a. d. Techn. Hochsch. in München.

I. Band 1. Heft. Dritte, umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. X, 182 Seiten. 1920. 6.—, geb. 7.20

I. Band 2. Heft. Fünfte, umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. X, 286 Seiten. 1921. 9.—, geb. 10.50

II. Band. Dritte, vollständig umgearbeitete Auflage. Groß-Oktav. VI, 444 Seiten. 1920. 14.—, geb. 15.50

Das Buch will in einer für Studierende geeigneten Form den Zugang zu den Funktionentheorien von Weierstraß und von Riemann zugleich erschließen.

Einleitung in die Funktionentheorie. (Die komplexen Zahlen und ihre elementaren Funktionen.) Von MAX ROSE, Oberlehrer an der Goetheschule zu Berlin-Wilmersdorf. Mit 10 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 135 Seiten. 1918. (Samml. Göschens Bd. 581.) Geb. 1.50

Der Verfasser gibt eine systematische Darstellung aller derjenigen Hilfsmittel, deren die Funktionentheorie zur Entwicklung ihrer Prinzipien bedarf. Im Anhang werden die Grundzüge der konformen Abbildung erörtert und an Beispielen erläutert.

Funktionentheorie. Von Dr. KONRAD KNOPP, o. Professor an der Universität Tübingen.

Erster Teil: Grundlagen der allgemeinen Theorie der analytischen Funktionen. Mit 8 Figuren. Zweite, vollständig neubearbeitete Auflage. Durchgesehener Neudruck. 140 Seiten. 1926. (Sammlung Göschens Bd. 668.) Geb. 1.50

Zweiter Teil: Anwendungen und Weiterführungen der allgemeinen Theorie. Mit 7 Figuren. Zweite, vollständig neubearbeitete Auflage. Durchgesehener Neudruck. 138 Seiten. 1926. (Samml. Göschens Bd. 703.) Geb. 1.50

„Die beiden vollständig neubearbeiteten Bände seien allen Studierenden der Mathematik als Muster klarer und strenger Darstellung aufs wärmste empfohlen.“ Monatschrift für Mathematik und Physik.

Aufgabensammlung zur Funktionentheorie. Von Dr. KONRAD KNOPP, o. Professor an der Universität Tübingen.

Erster Teil: Aufgaben zur elementaren Funktionentheorie. 135 Seiten. 1923. (Samml. Göschens Bd. 877.) Geb. 1.50

Zweiter Teil: Aufgaben zur höheren Funktionentheorie. 143 Seiten. 1928. (Samml. Göschens Bd. 878.) Geb. 1.50

Die Mehrzahl der in den beiden Bänden enthaltenen Aufgaben beziehen sich auf Knopps „Funktionentheorie“ (Samml. Göschens Bd. 668 und 703). Sämtlichen Aufgaben sind die Lösungen beigegeben.

Automorphe Funktionen. Von Dr. L. SCHLESINGER, o. Professor an der Universität Gießen. 1924. X, 205 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 5.)

8.—, geb. 9.20

Im ersten Abschnitt wird die Kernfrage an einfachen Beispielen behandelt, darauf die notwendigsten Sätze aus der nichteuklidischen Geometrie unter Heranziehung der Kreisverwandtschaften. Es folgt der Diskontinuitätsbeweis der zugehörigen Gruppe von Verschiebungen und der Existenzbeweis für die zu einem Normalpolygon gehörigen automorphen Funktionen.

Elliptische Funktionen. Von Dr. R. KÖNIG, o. Professor der Mathematik an der Universität Jena, und Dr. M. KRAFFT, a. o. Professor an der Universität Marburg i. H. Mit 4 Figuren. 263 Seiten. (Göschens Lehrbücherei Bd. 11.)

13.—, geb. 14.50

Das Buch will dem Studierenden und Fachmann die elliptischen Funktionen als Glied eines großen Organismus verstehen lehren, der mit den einfachsten analytischen Funktionen, den rationalen, beginnt und schließlich zu den Riemannschen Funktionensystemen emporwächst.

Einführung in die Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen. Von HEINRICH W. E. JUNG, o. ö. Prof. an der Universität Halle-Wittenberg. Mit 35 Abb. im Text. Groß-Oktav. VI, 246 S. 1923. 3.50, geb. 4.—

„Das überaus klar und anschaulich geschriebene Buch wird allen denjenigen, die sich mit den grundlegenden Methoden der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen vertraut machen wollen, von Nutzen sein.“

Zeitschrift für mathem. u. naturwiss. Unterricht.

Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen. Von Professor Dr. A. WANGERIN in Halle a. d. S.

I. Teil: Mit 46 Fig. VIII, 255 S. Unveränd. Neudr. 1922. (Slg. Schub. Bd. 58.) Geb. 4.—

II. Teil: Mit 17 Fig. VIII, 286 Seiten. 1921. (Samml. Schubert Bd. 59.) Geb. 4.—

„Wer in die Potentialtheorie eindringen will, findet in dem leichtverständlichen Buch einen zuverlässigen und angenehmen Führer.“

Zeitschrift f. d. mathem. u. naturwiss. Unterricht.

Potentialtheorie. Von Dr. W. STERNBERG, Privatdozent in Heidelberg.

I. Die Elemente der Potentialtheorie. Mit 5 Figuren. 136 Seiten. 1925.
(Samml. Götschen Bd. 901.) Geb. 1.50

II. Die Randwertaufgaben der Potentialtheorie. Mit 1 Figur. 133 Seiten. 1926.
(Samml. Götschen Bd. 944.) Geb. 1.50

„Die Bände geben einen klaren Einblick in die Gedankengänge und Beweismethoden der Potentialtheorie. Da es dem Verfasser gelungen ist, trotz der räumlichen Enge alle erforderlichen Beweise exakt durchzuführen, ist das Werk als Hilfsbuch neben einer Vorlesung durchaus zu empfehlen.“
Zeitschrift für den mathem. u. naturw. Unterricht.

Numerische Integration. Von Professor Dr. F. A. WILLERS. Mit 2 Figuren.
116 Seiten. 1923. (Samml. Götschen Bd. 864.) Geb. 1.50

Die Darstellung ist sehr übersichtlich und so elementar als möglich gehalten. Sie setzt nur die Kenntnisse der Grundgesetze der Differential- und Integralrechnung voraus und wendet sich an Mathematiker, Physiker und vor allem an Ingenieure, für die das Buch eine gute Anleitung und Einführung ist.

Graphische Integration. Von Professor Dr. F. A. WILLERS. Mit 53 Figuren.
142 Seiten. 1920. (Samml. Götschen Bd. 801.) Geb. 1.50

Der Verfasser versucht, einem weiteren Kreise die immer noch zu wenig benutzten zeichnerischen Methoden bekanntzumachen. Er setzt dabei so wenig Vorkenntnisse wie möglich voraus.

Das Kontinuum. Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis.
Von Dr. HERMANN WEYL, Professor an der Technischen Hochschule Zürich.
Groß-Oktav. V, 83 Seiten. 1918. 3.—

Taschenbuch für praktische Geometrie. Von Dr. H. LÖSCHNER, o. ö. Professor
an der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn. Mit 10 Figuren im Text.
Klein-Oktav. X, 147 Seiten. 1922. Geb. 2.—

Der vorliegende Band enthält die wichtigsten Formeln der praktischen Geometrie, die Konstanten und Genauigkeitsangaben, Leitsätze für die Beobachtungen und Merkregelein für die Behandlung, Beförderung und Aufbewahrung geodätischer Instrumente und Geräte.

Grundzüge der ebenen Geometrie. Von Professor Dr. FR. BOHNERT in
Hamburg. Mit 220 Fig. VIII, 223 Seiten. 1915. (Samml. Schubert Bd. 2.) Geb. 3.90

Ebene Geometrie. Von G. MAHLER, Professor der Mathematik am Gymnasium in Ulm. Mit 110 zweifarbigen Figuren. Vierte, verbesserte Auflage.
Neudruck. 166 Seiten. 1922. (Samml. Götschen Bd. 41.) Geb. 1.50

Ebene und sphärische Trigonometrie. Von Prof. Dr. F. BOHNERT in Hamburg. Zweite Auflage. Dritter Neudruck. Mit 63 Figuren. VIII, 167 Seiten.
1919. (Samml. Schubert Bd. 3.) Geb. 4.40

Das Buch enthält die Grundbegriffe der Trigonometrie. Die beigegebenen Beispiele sollen den unentbehrlichen Übungsstoff liefern und gleichzeitig einen Überblick über die vielfache Verwendbarkeit und Bedeutsamkeit der Trigonometrie gewähren. Das letzte Kapitel bietet die wichtigsten Anwendungen der Sphärik auf die mathematische Geographie.

Ebene und sphärische Trigonometrie. Von Dr. GERHARD HESSENBERG, o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin. Mit 59 Figuren. Dritte, neubearbeitete Auflage. Durchgesehener Neudruck. 171 Seiten. 1926.
(Samml. Götschen Bd. 99.) Geb. 1.50

„Der Verfasser hat seine Aufgabe, in dem engen Rahmen nicht bloß alle wichtigen Formeln mitzuteilen, sondern auch die Grundgedanken, auf welchen dieselben beruhen, klar darzustellen und den Zusammenhang derselben, ihre Bedeutung und Anwendbarkeit hervorzuheben, vortrefflich gelöst.“
Archiv der Mathematik und Physik.

Sammlung von Aufgaben aus der ebenen und sphärischen Trigonometrie.
Von Dr. FRITZ HEILAND, Studienrat am Gymnasium in Jena. Mit 26 Figuren.
152 Seiten. 1922. (Samml. Götschen Bd. 848.) Geb. 1.50

Die Sammlung schließt sich nach Anordnung und Bezeichnung dem Lehrbuch Hessenbergs (Samml. Götschen Bd. 99) an. Wichtigere Formeln sind vorangestellt, zum Teil mit Ableitung. Zu sämtlichen Aufgaben sind die Lösungen angegeben.

Stereometrie. Von Professor Dr. ROBERT GLASER. Dritte, verbesserte
Auflage. Mit 81 Figuren. 139 Seiten. 1920. (Samml. Götschen Bd. 97.)
Geb. 1.50

Sammlung von Aufgaben aus der Stereometrie. Von Professor Dr. ROBERT GLASER. Mit 54 Figuren. 168 Seiten. 1917. (Samml. Göschen Bd. 779.)

Geb. 1.50

Aufgaben über Prisma und Zylinder — Projektionszeichen — Pyramiden und Kegel — Kugel und Kugelteile — konoidartige Körper — Prismatoide — schief abgeschnittene Prismen und Zylinder — Guldinsche Regel.

Einführung in die analytische Geometrie. Von Professor Dr. GERHARD KOWALEWSKI. Mit 112 Figuren. Dritte, unveränderte Auflage. Lexikon-Oktav. VIII, 360 Seiten. 1929.

Geb. 11.20

Das aus Vorlesungen entstandene Buch ist namentlich zum Gebrauch für Studierende bestimmt.

Lehrbuch der analytischen Geometrie. Von Dr. FRIEDRICH SCHUR, o. Professor an der Universität Breslau. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 81 Figuren. Groß-Oktav. XII, 248 Seiten. 1912.

6.50, geb. 7.70

Analytische Geometrie der Ebene. Von Dr. R. HAUSSNER, o. ö. Professor an der Universität Jena. Mit 60 Figuren. 164 Seiten. 1928. (Samml. Göschen Nr. 65.)

Geb. 1.50

Die Darstellung beginnt elementar und setzt nur die nötigsten planimetrischen und algebraischen Schulkenntnisse voraus. Es ist nicht nur die allgemeine Theorie der analytischen Gebilde ersten und zweiten Grades vollständig gegeben, sondern auch eine größere Zahl von speziellen Sätzen, vornehmlich über die Kegelschnitte.

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene. Von Dr. R. HAUSSNER, o. ö. Professor an der Universität Jena. 1929. (Samml. Göschen Bd. 256.)

Geb. 1.50

Analytische Geometrie des Raumes. Von Professor Dr. MAX SIMON, Straßburg i. E. Mit 28 Abbildungen. Dritte, verbesserte Auflage. Neudruck. 208 Seiten. 1922. (Samml. Göschen Bd. 89.)

Geb. 1.50

Das Werk besitzt den Charakter eines ausführlichen Lehrbuches; es gibt eine übersichtliche und abgeschlossene Darstellung der analytischen Geometrie des Raumes nach dem gegenwärtigen Stande der wissenschaftlichen Forschung und bietet zuverlässige Belehrung über die analytisch-geometrischen Theorien.

Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie des Raumes. Von O. TH. BÜCKLEN, Professor am Realgymnasium in Schwäb.-Gmünd. Mit 8 Figuren. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Neudruck. 109 Seiten. 1923. (Samml. Göschen Bd. 309.)

Geb. 1.50

Die vorliegende Sammlung ist für die erste Einführung bestimmt. Sie soll dem Schüler oder Studierenden Gelegenheit geben, die analytischen Methoden anzuwenden, die Gebilde in ihren verschiedenen Lagen und ihren besonderen Fällen, sowie ihre Beziehungen zueinander zu erfassen und zugleich seine Raumanschauung zu bilden.

Nichteuklidische Geometrie. Von Prof. Dr. H. LIEBMANN in Heidelberg. Mit 40 Figuren. Dritte Auflage. 150 Seiten. 1923.

6.—, geb. 7.—

Das vorliegende Buch will, möglichst wenig an mathematischen Kenntnissen voraussetzend, in die nichteuklidische Geometrie einführen, und zwar nur auf einem Gebiete — dem der Ebene —, auf diesem aber gründlich dargestellt.

Nichteuklidische Geometrie. Von Professor Dr. RICHARD BALDUS. Mit 71 Figuren. (Samml. Göschen Bd. 970.)

Geb. 1.50

Wenn auch der Band durch möglichste Klarheit und zahlreiche Figuren, auf die besondere Sorgfalt verwendet wurde, zunächst auf den Neuling auf diesem Gebiet Rücksicht nimmt, so dürfte doch auch der Fachmann manches Neue darin finden. Daß bis zu den Übergängen aus dem mathematischen in das rein philosophische Gebiet vorgedrungen wird, dürfte philosophisch interessierten Lesern willkommen sein.

Kreis und Kugel. Von Dr. WILHELM BLASCHKE, o. Prof. an der Universität Hamburg. Mit 27 Fig. im Text. Groß-Oktav. X, 169 Seiten. 1916. 4.40, geb. 5.50

Einführung in die konforme Abbildung. Von Dr. LUDWIG BIEBERBACH, o. ö. Professor an der Universität Berlin. Zweite, neubearbeitete Auflage. Mit 38 Figuren. 131 Seiten. 1927. (Samml. Göschen Bd. 768.)

Geb. 1.50

„Der Autor faßt seine Aufgabe, eine Einführung in die konforme Abbildung zu geben, in doppeltem Sinne auf. Er vermittelt dem Leser die eigentlich elementaren Teile der Theorie der konformen Abbildung; andererseits eröffnet er durch Eingehen auf einzelne neue Entwicklungen den Zugang zu den modernsten und tiefsten Untersuchungen der gesamten Funktionentheorie.“

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.

Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. Von Dr. GEORG SCHEFFERS, Geh. Reg.-Rat, Professor an der Technischen Hochschule Charlottenburg. I. Mit 107 Figuren. Dritte, verbesserte Auflage. XII, 482 Seiten. 1923. 13.—, geb. 14.50

II. Mit 110 Fig. Dritte, verbesserte Aufl. XI, 582 Seiten. 1922. 15.—, geb. 16.50

Die besprochenen Probleme werden alle mit großer Ausführlichkeit behandelt. Die am Schluß beigefügten Formeltafeln und Register erhöhen den Wert des Werkes, das nicht nur einführen, sondern auch zu selbständigen Forschungen anregen soll.

Allgemeine Theorie der Raumkurven und Flächen. Von Oberstudiendirektor Dr. VIKTOR KOMMERELL in Tübingen und Prof. Dr. KARL KOMMERELL in Tübingen. I. Teil. Dritte Auflage. Mit 28 Figuren. VIII, 184 Seiten. 1921. (Samml. Schubert Bd. 29.) Geb. 3.—

II. Teil. Dritte Aufl. Mit 13 Fig. IV, 196 S. 1921. (Samml. Schubert Bd. 44.) Geb. 3.—

In der neuen Auflage werden u. a. die Untersuchungen Salkowskis über die Raumkurven und die Bertrand'schen Kurven berücksichtigt.

Liniengeometrie mit Anwendungen. Von Professor Dr. KONRAD ZINDLER in Innsbruck. I. Teil. Mit 87 Figuren. VIII, 380 Seiten. Neudruck 1928. (Samml. Schubert Bd. 34.) Geb. 18.—

II. Teil. Mit 24 Figuren. VII, 252 Seiten. 1906. (Samml. Schubert Bd. 51.) Geb. 9.50

Ein besonderer Vorzug dieses vorliegenden Lehr- und Einführungsbuches sind die jedem Bande beigegebenen Übungsaufgaben, zu deren Lösung sich am Schluß eine Anleitung befindet.

Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung. Von Dr. KARL DOEHLEMANN, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule München. Fünfte, verbesserte Auflage.

Erster Teil. Mit 59 Figuren. 132 Seiten. 1922. (Samml. Götschen Bd. 72.) Geb. 1.50

Zweiter Teil. Mit 55 Figuren. 138 Seiten. 1924. (Samml. Götschen Bd. 876.) Geb. 1.50

„Die Darstellung ist musterhaft klar und leichtverständlich und wird durch übersichtliche Zeichnungen und zahlreiche Aufgaben aufs trefflichste illustriert.“

Bayerische Blätter für das Gymnasialschulwesen.

Lehrbuch der darstellenden Geometrie. Von Dr. KARL ROHN, Geh. Rat, weiland Professor an der Universität Leipzig, und Dr. ERWIN PAPPERITZ, Geh. Rat, Professor an der Bergakademie in Freiberg i. Sa. Drei Bände. Groß-Oktav. I. Orthogonalprojektion. Vielfache, Perspektivität ebener Figuren, Kurven, Zylinder, Kugel, Kegel, Rotations- und Schraubenflächen. Vierte, erweiterte Auflage. XX, 502 Seiten. Mit 351 Figuren. 1913. Anastatischer Nachdruck. 1921. 16.50, geb. 18.—

II. Axonometrie, Perspektive, Beleuchtung. Vierte, umgearbeitete Auflage. VI, 194 Seiten mit 118 Figuren. 1916. 6.20, geb. 7.20

III. Kegelschnitte, Flächen zweiten Grades, Regel-, abwickelbare und andere Flächen. Flächenkrümmung. Vierte, unveränderte Auflage. X, 334 Seiten. Mit 157 Figuren. 1923. 10.80, geb. 12.—

Darstellende Geometrie. Von THEODOR SCHMID, o. ö. Professor an der Technischen Hochschule in Wien. I. Teil: Eckige Körper, Kugel, Zylinder, Kegel, Plankurven und Raumkurven mit den zugehörigen Torsen im Normalrißverfahren und in orthogonaler Axonometrie. Dritte Auflage. Mit 170 Figuren. 283 Seiten. 1922. (Samml. Schubert Bd. 65.) Geb. 6.—

II. Teil: Schiefe und zentrale Projektion. Dreh-, Rohr-, Schrauben- und Regelflächen. Geländedarstellung, Kartenprojektion, Nomographie. Zweite Auflage. Mit 163 Figuren. 340 Seiten. 1923. (Samml. Schubert Bd. 66.) Geb. 7.50

„Unter den zahlreichen guten Lehrbüchern der darstellenden Geometrie steht das vorliegende mit in erster Reihe. Ausgezeichnete Figuren, klare Darstellung, reicher Inhalt sind seine besonderen Kennzeichen.“

Unterrichtsblätter f. Mathem. u. Naturw.

Darstellende Geometrie. Von Dr. ROBERT HAUSSNER, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Jena. Erster Teil: Elemente; Ebenflächige Gebilde. Dritte, vermehrte und verbesserte Auflage. Mit 110 Figuren im Text. Neudruck. 207 Seiten. 1922. (Samml. Göschens Bd. 142.) Geb. 1.50

Zweiter Teil: Perspektive ebener Gebilde; Kegelschnitte. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 88 Figuren im Text. Neudruck. 168 Seiten. 1924. (Samml. Göschens Bd. 143.) Geb. 1.50

In vier Abschnitten werden die Parallelprojektion ebener und räumlicher Gebilde, die Darstellung von Punkt, Gerader und Ebene in senkrechter Projektion auf zwei zueinander senkrechte Ebenen sowie ebenflächige Gebilde behandelt.

Koordinatensysteme. Von PAUL B. FISCHER, Studienrat am Gymnasium zu Berlin-Steglitz. Mit 8 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 128 Seiten. 1919. (Samml. Göschens Bd. 507.) Geb. 1.50

Der Verfasser versucht den Koordinatenbegriff von einem allgemeinen Standpunkt aus darzustellen. Durch sorgfältig ausgewählte, zahlreiche Literaturangaben wird der Wert des Bandes erhöht.

Algebraische Kurven. Neue Bearbeitung von Dr. H. WIELEITNER, Oberstudiendirektor in München.

Erster Teil: Gestaltliche Verhältnisse. Mit 97 Figuren. Neudruck. 146 Seiten. 1919. (Samml. Göschens Bd. 435.) Geb. 1.50

Zweiter Teil: Allgemeine Eigenschaften. Mit 35 Figuren. Neudruck. 120 Seiten. 1919. (Samml. Göschens Bd. 436.) Geb. 1.50

Praktisches Zahlenrechnen. Von Professor Dr.-Ing. P. WERKMEISTER in Dresden. Mit 58 Figuren. 135 Seiten. 1921. (Samml. Göschens Bd. 405.) Geb. 1.50

Das Buch gibt eine übersichtliche Auskunft über die in der Praxis angewendeten Arten des Rechnens. Es wird daher in allen Kreisen der Technik und Naturwissenschaft ein willkommener Führer und Ratgeber sein.

Mathematische Instrumente. Von Professor Dr. Fr. A. WILLERS. Mit 68 Figuren. 144 Seiten. 1926. (Samml. Göschens Bd. 922.) Geb. 1.50

Der Band bringt nicht nur eine Beschreibung der mathematischen Instrumente, sondern auch eine genaue Theorie, aus der die Anwendungsmöglichkeiten, die beste Art des Gebrauchs, sowie die Größe der auftretenden Ungenauigkeiten abgeleitet werden.

Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik. Von Professor Dr. MARCELLO PIRANI, Privatdozent an der Technischen Hochschule in Charlottenburg. Mit 58 Figuren. Neudruck. 126 Seiten. 1922. (Samml. Göschens Bd. 728.) Geb. 1.50

Von der einfachen Darstellung von Größen mit unbekanntem Zusammenhang in Form von Kurven oder Skalen ausgehend, geht der Verfasser zur Darstellung von Größen bekannter Abhängigkeit (Funktionsskalen, insbesondere logarithmische projektive Teilung) über und bespricht dann die Aufstellung von Rechentafeln namentlich mit der Methode der fluchtrechten Punkte oder mit Hilfe mehrerer gekreuzter Linien.

Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von Dr. OTTO KNOPF, o. Professor der Astronomie an der Universität Jena. I. 112 Seiten. 1923. II. 112 Seiten. 1923. (Samml. Göschens Bd. 508 und 871.) Geb. je 1.50

Eine knappe, klare Darstellung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, deren Wert für die mathematischen Grundlagen des Versicherungswesens, für die statistische Mechanik und neuerdings auch für das Fernsprechwesen auf der Hand liegt.

Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Von WILHELM WEITBRECHT, Professor der Geodäsie in Stuttgart. Zweite, veränderte Auflage.

I. Teil: Ableitung der grundlegenden Sätze und Formeln. Mit 8 Figuren. Neudruck. 127 Seiten. 1919. (Samml. Göschens Bd. 302.) Geb. 1.50

II. Teil: Zahlenbeispiele. Mit 8 Figuren. Neudruck. 141 Seiten. 1920. (Samml. Göschens Bd. 641.) Geb. 1.50

Jeder der beiden Teile bildet ein das ganze Gebiet umfassendes, für sich geschlossenes Ganzes. Der erste enthält die Ableitung der grundlegenden Sätze und Formeln, während im zweiten die fertigen Ergebnisse dieser Ableitung zusammengestellt und auf hauptsächlich dem Gebiet der Geodäsie entnommene Zahlenbeispiele angewendet werden.

Versicherungsmathematik. Von Dr. FRIEDRICH BOEHM, Professor an der Universität München.

I: Elemente der Versicherungsrechnung. 144 Seiten. 1925. (Samml. Göschel Bd. 180.) Geb. 1.50

II: Lebensversicherungsmathematik. Einführung in die technischen Grundlagen der Sozialversicherung. 171 Seiten. 1926. (Samml. Göschel Bd. 917.) Geb. 1.50

Der erste Band behandelt den Zins als erste, die Sterbetafel als zweite Rechnungsgrundlage, die Prämienreserve und die Versicherung verbundener Leben. Der zweite Band enthält außer einer eingehenden Behandlung der Lebensversicherungsmathematik eine Einführung in die technischen Grundlagen der Sozialversicherung.

Amortisations-Tabellen für alle nach $\frac{1}{8}$ Prozent abgestuften Verzinsungen zwischen drei und fünf Prozent und für ganz-, halb- und vierteljährliche Verrechnung. Von Dr. CONRAD HÄNIG, Vorstand des Mathem. Statist. Bureaus der Pfälz. Hypothekenbank in Ludwigshafen a. Rh. Groß-Quart. VIII, 220 Seiten. 1905. 11.—, geb. 12.50

Politische Arithmetik. (Zinsseszinsen-, Renten- und Anleiherechnung.) Von Dr. EMIL FOERSTER, Honorarprofessor an der Technischen Hochschule in Wien. Mit 7 Figuren. 152 Seiten. 1924. (Samml. Göschel Bd. 879.) Geb. 1.50

In 6 Kapiteln wird der Reihe nach die einfache Zinsenrechnung, die Zinsseszinsenrechnung für Einzelkapitalien und Renten, das Rechnen mit vorschüssigen Zinsen, die Schuldentilgung sowie die Kurs- und Rentabilitätsrechnung behandelt.

Die statistische Methode als selbständige Wissenschaft. Eine Einführung in deren Fundamente und Grundzüge. Von Dr. HUGO FORCHER, Privatdozent. VI, 366 Seiten mit 60 Figuren. Groß-Oktav. 1913. 10.—

Statik. Von Professor Dipl.-Ing. W. HAUBER in Stuttgart.

I. Teil: Die Grundlehren der Statik starrer Körper. Mit 82 Figuren. Sechster Neudruck. 148 Seiten. 1921. (Samml. Göschel Bd. 178.) Geb. 1.50

II. Teil: Angewandte Statik. Mit 61 Figuren. Sechster Neudruck. 149 Seiten. 1922. (Samml. Göschel Bd. 179.) Geb. 1.50

Mit dem ersten Teile ist beabsichtigt, eine kurze Darstellung der wichtigsten der technischen Statik zugrunde liegenden allgemeinen statischen Gesetze zu geben. Der zweite Teil umfaßt die statische Berechnung starrer Stabverbindungen, der statisch bestimmten Fachwerksträger für Dächer und Brücken, der Spreng- und Hängewerke, enthält die Lehre über die Standfestigkeit der Mauern und Tonnengewölbe und gibt das Wichtigste aus der Theorie des Erddrucks und dem Gebiet des Gleichgewichts der seilartigen Körper.

Vorlesungen über graphische Statik. Von Dr. FR. SCHUR, o. Professor an der Technischen Hochschule in Breslau. Herausgegeben unter Mitwirkung von WOLFGANG VOGT. Mit zahlreichen Figuren im Text. Groß-Oktav. VIII, 219 Seiten. 1915. 7.—, geb. 8.20

Graphische Statik mit besonderer Berücksichtigung der Einflußlinien. Von Dipl.-Ing. OTTO HENKEL, Bauingenieur und Studienrat an der Baugewerkschule in Magdeburg.

I. Teil: Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte in der Ebene. Schwerpunkte. Trägheitsmomente. Spannungen in geraden Stäben. Der einfache Vollwand- und Fachwerkträger. Der Dreigelenkbogen. Gewölbe. Mit 121 Figuren. Neudruck. 146 Seiten. 1923. (Samml. Göschel Bd. 603.) Geb. 1.50

II. Teil: Durchgehende Gelenkträger. Dreigelenkbogen. Formänderungen gerader Träger. Durchgehende (kontinuierliche) Träger. Formänderungen gebogener Träger. Zweigelenkbogen. Eingespannter Bogen. Erddruck und Wasserdruck. Mit 86 Figuren. Zweite Auflage. 176 Seiten. 1928. (Samml. Göschel Bd. 695.) Geb. 1.50

Der erste Band enthält die Zerlegung der Kräfte in einer Ebene, graphische Schwerpunktsbestimmungen ebener Gebilde, Trägheitsmomente, Spannungen in geraden Stäben, den einfachen Vollwand- und Fachwerkträger, Dreigelenkbogen und das Gewölbe. Der zweite Band behandelt die durchgehenden Gelenkträger, Dreigelenkbogen, Formänderungen gerader und gebogener Träger, Zweigelenkbogen, den eingespannten Bogen. Erddruck- und Wasserdruck.

Analysis der ebenen Bewegung. Von Dr. MARTIN KRAUSE, Geheimrat, Professor an der Technischen Hochschule Dresden. Unter Mitwirkung von Dr. phil. et rer. techn. Alexander Carl in Leisnig. Oktav. VII, 216 Seiten. 1920. 3.—

Das Buch beschäftigt sich mit den analytischen Beziehungen zwischen den Punkten zweier, in der gleichen Ebene gelegener Koordinatensysteme, von denen das eine fest, das andere bewegt ist, ausgehend von den Transformationsgleichungen.

Theoretische Physik. Von Dr. GUSTAV JÄGER, Professor an der Universität Wien. 4 Bände.

I. Band: Mechanik und Akustik. Mit 24 Figuren. Fünfte Auflage. Neudruck. 167 Seiten. 1922. (Samml. Götschen Band 76.) Geb. 1.50

II. Band: Licht und Wärme. Mit 47 Figuren. Fünfte Auflage. 156 Seiten. 1921. (Samml. Götschen Band 77.) Geb. 1.50

III. Band: Elektrizität und Magnetismus. Mit 33 Figuren. Fünfte verbesserte Auflage. 140 Seiten. 1922. (Samml. Götschen Bd. 78.) Geb. 1.50

IV. Band: Elektromagnetische Lichttheorie und Elektronik. Mit 17 Figuren. Dritte, verbesserte Auflage. 146 Seiten. 1921. (Samml. Götschen Bd. 374.) Geb. 1.50

Allen, welche sich ein Kompendium der theoretischen Physik anschaffen wollen, seien diese Bändchen empfohlen. Der Verfasser hat den Stoff aus dem Gesamtgebiet sorgfältig ausgewählt und dabei die neuesten Resultate der Forschung berücksichtigt.

Einführung in die theoretische Physik. Von Dr. CLEMENS SCHÄFER, Professor an der Universität Breslau. 2 Bände.

I. Band: Mechanik materieller Punkte, Mechanik starrer Körper, Mechanik der Kontinua (Elastizität und Hydromechanik). Mit 272 Figuren im Text. Dritte, verbesserte und vermehrte Auflage. Groß-Oktav. XII, 991 Seiten. 1929. 45.—, geb. 48.—

II. Band.

Erscheint Frühjahr 1929.

III. Band.

Erscheint Anfang 1930.

„Das vorliegende Werk füllt eine merkbare Lücke in der bisher vorliegenden Literatur über theoretische Physik aus. Was es von seinen Vorgängern unterscheidet, ist einmal die Verwendung aller modernen Methoden und zum zweiten die klare und ausführliche Darstellungsweise, welche auch das Studium schwieriger Kapitel zu einem Genuß macht.“
Annalen der Physik.

Einführung in die theoretische Physik mit besonderer Berücksichtigung ihrer modernen Probleme. Von ARTHUR HAAS, a. o. Professor a. d. Universität Wien.

I. Band. Dritte und vierte, völlig umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 58 Abbildungen im Text. Groß-Oktav. X, 307 Seiten. 1923. 7.50, geb. 9.—

II. Band. Dritte und vierte, völlig umgearbeitete und vermehrte Auflage. Mit 72 Abbildungen im Text und auf zwei Tafeln. Groß-Oktav. VIII, 379 Seiten, 1924. 8.50, geb. 10.—

„Der Vorzug des Buches liegt zweifellos in dem Umstande, daß es dem Verfasser gelingt, den Leser unter Vermeidung jedes überflüssigen Wissensballastes bis an die Probleme der modernen theoretisch-physikalischen Forschung heranzuführen. Es gibt gewiß kein anderes Buch ähnlichen Umfangs, das den Studierenden gleichzeitig mit den Elementen der theoretischen Physik und mit den wichtigsten modernen Forschungsergebnissen, wie Röntgenspektroskopie, Kristallanalyse, Isotopenbestimmung usw. vertraut macht.“
Monatshefte für Mathem. u. Physik.

Zur einheitlichen Feldtheorie. Von Professor Dr. ALBERT EINSTEIN. 8 Seiten. I.—

Neue Begründung der Relativitätstheorie.

Allgemeine Mechanik der Punkte und starren Systeme. Ein Lehrbuch für Hochschulen. Von E. BUDDE. 2 Bände. Oktav.

I. Band: Mechanik der Punkte und Punktsysteme. 418 Seiten. 1890. 7.—

II. Band: Mechanische Summen und deren starre Gebilde. Seite 419—968. 1891. 8.—

Theorie des Schlickschen Massenausgleichs bei mehrkurbeligen Dampfmaschinen. Von Professor Dr. HERMANN SCHUBERT. Lexikon-Oktav. 132 Seiten. 1901. 8.—

Das vorliegende Buch behandelt den Massenausgleich vom rein mathematischen Standpunkt aus. Die Anforderungen, welche die Praxis stellt, werden als gegebene Nebenbedingungen den Gleichungen hinzugefügt, deren Erfüllung notwendig ist, um den Ausgleich zu ermöglichen.

Kinematik. Von Dr.-Ing. HANS POLSTER, Betriebsingenieur der Badischen Anilin- und Sodafabrik Merseburg-Leuna. Mit 76 Abbildungen. Zweite Auflage. 151 Seiten. 1920. (Samml. Götschen Bd. 584.) Geb. 1.50

Der Band bietet dem Studierenden eine Einführung, will aber darüber hinaus den in der Praxis stehenden Ingenieuren, die sich in die schwierigen Bewegungsverhältnisse von Nocken-, Schwingdaumen- und Wälzhebelsteuerungen oder von anderen Gebieten tieferen Einblick verschaffen wollen, ein bequemer Führer sein.

Ballistik. Von Dr. THEODOR VAHLEN, o. ö. Professor der reinen und angewandten Mathematik an der Universität Greifswald. Mit 53 Abbildungen. Groß-Oktav. XII, 231 Seiten. 1922. 9.—, geb. 10.—

Im Gegensatz zu anderen Werken über Ballistik bringt dieses neue Buch gerade den mathematischen Gehalt der Ballistik zur Darstellung. Es gewinnt dadurch noch erhöhte Bedeutung, daß es seine Entstehung den praktischen Erfahrungen verdankt, die der Verfasser im Kriege machte. U. a. weist es als neu die zwischen innerer und äußerer Ballistik einzuschaltende Übergangsballistik und als Ballistik in großen Höhen die kosmische Ballistik auf.

Festigkeitslehre. Von Professor Dipl.-Ing. W. HAUBER in Stuttgart. Mit 56 Figuren und 1 Tafel. Achter Neudruck. 127 Seiten. 1923. (Samml. Götschen Bd. 288.) Geb. 1.50

In dem Band gibt der Verfasser eine kurze Übersicht über die Fundamentalsätze der elastischen Kräfte in ihrer Anwendung auf die einfacheren Fälle der Festigkeit, soweit sie für die gewöhnlichen Aufgaben des praktischen Lebens in Frage kommen.

Aufgabensammlung zur Festigkeitslehre mit Lösungen. Von R. HAREN. Dritte, vollständig neubearbeitete Auflage von JOSEF FURTMAYR, Dipl.-Ing. in Stuttgart. Mit 43 Figuren. 116 Seiten. 1923. (Samml. Götschen Bd. 491.) Geb. 1.50

Der Band bietet in 8 Abschnitten 66 Aufgaben nebst Lösungen über Zug, Druck, Biegung, Schub, Verdrehung, Knickung, Festigkeit plattenförmiger Körper und zusammengesetzte Festigkeit; in einem Anhang sind die benötigten Zahlenwerte kurz zusammengestellt.

Hydraulik. Von Professor Dipl.-Ing. W. HAUBER in Stuttgart. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Neudruck. Mit 45 Figuren. 151 Seiten. 1925. (Samml. Götschen Bd. 397.) Geb. 1.50

Das Buch enthält eine Darstellung der Hydrostatik und bringt aus der Hydrodynamik: Ausfluß des Wassers aus Gefäßen; Überfall des Wassers über Wehre; Die Bewegung des Wassers in Flüssen und Kanälen; Die Bewegung des Wassers in Röhren mit konstantem Querschnitt; Stoß eines zylindrischen oder prismatischen Wasserstrahls auf eine Zylinderfläche.

Elastizitätslehre für Ingenieure. Von Professor Dr.-Ing. MAX ENSSLIN an der Höheren Maschinenbauschule Eßlingen.

I. Grundlagen und Allgemeines über Spannungszustände, Zylinder, ebene Platten, Torsion, gekrümmte Träger. Mit 65 Figuren. Zweite, verbesserte Auflage. 147 Seiten. 1921. (Samml. Götschen Bd. 519.) Geb. 1.50

II. Statisch unbestimmte Konstruktionen, Sätze von Castigliano und Maxwell, Dreimomentensatz, Vorspannungen, Temperaturspannungen, Fachwerke mit überzähligen Stützpunkten und überzähligen Stäben, Prinzip der virtuellen Verrückungen, Verschiebungsplan. Mit 44 Figuren. 120 Seiten. 1927. (Samml. Götschen Bd. 957.) Geb. 1.50

Band I bespricht die Grundlagen der Elastizitätslehre sowie Allgemeines über Spannungszustände, Zylinder, ebene Platten, Torsion und gekrümmte Träger. Band II gibt eine Einführung in die Methoden zur Berechnung der statisch unbestimmten Konstruktion des Bau- und Maschineningenieurs.

Einführung in die geometrische Optik. Von Dr. W. HINRICHS, Berlin-Wilmersdorf. Mit 56 Figuren. Zweite verbesserte Auflage. 144 Seiten. 1924. (Samml. Götschen Bd. 532.) Geb. 1.50

Nach der Einleitung über die Grundgesetze der geometrischen Optik folgen die Abschnitte über die Reflexion an ebenen Flächen und sphärischen Flächen. Dann wird die Brechung an ebenen Flächen, an einer Kugelfläche und durch ein zentriertes System von Kugelflächen behandelt. In Kapitel VI finden die Linsen und Linsensysteme Beachtung.

Vorlesungen über Thermodynamik. Von Dr. MAX PLANCK, Professor der theoretischen Physik an der Universität Berlin. Mit 5 Figuren im Text. Achte Auflage. Groß-Oktav. X, 287 Seiten. 1927. Geb. 11.50

Das vorliegende Buch geht von einigen allgemeinen Erfahrungstatsachen aus, namentlich von den beiden Hauptsätzen der Wärmelehre, und entwickelt hieraus die wichtigsten physikalischen und chemischen Sätze. Zunächst werden die Grundsätze und Begriffsverklärungen für Temperatur, Molgewicht und Wärmemenge erläutert, dann die beiden Hauptsätze der Wärmetheorie aufgestellt und bewiesen, endlich die Anwendungen auf die besonderen Gleichgewichtszustände ausführlich besprochen.

Grundriß der geographischen Ortsbestimmung aus astronomischen Beobachtungen. Von Dr. K. GRAFF, Observator der Hamburger Sternwarte. Mit 64 Figuren. Groß-Oktav. VIII, 210 Seiten. 1914. 6.—, geb. 7.—

Astronomische Ortsbestimmung im Ballon. Von ADOLF MARCUSE, Professor an der Universität Berlin. Mit 10 Tafeln, 3 Karten und 3 Textbildern. Oktav. 67 Seiten. 1909. 4.—, geb. 5.—

Ergebnisse der Breitenbeobachtungen auf dem Observatorium in Johannesburg vom März 1910 bis März 1913. Von Th. ALBRECHT. Mit 5 Tafeln. Quart. 28 Seiten. 1915. (Neue Folge d. Veröffentl. d. Zentralbureaus für internat. Erdmessung Nr. 27.) 8.—

Astronomie. Größe, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper. Von A. F. MÖBIUS. Bearbeitet von Dr. HERM. KOBOLD, o. Hon.-Professor an der Universität Kiel.

I. Das Planetensystem. Mit 33 Figuren. Elfte Auflage. Durchgesehener Neudruck. 136 Seiten. 1925. (Samml. Götschen Bd. 11.) Geb. 1.50

II. Kometen, Meteore und das Sternsystem. Mit 15 Figuren und 2 Sternkarten. Dreizehnte Auflage. 128 Seiten. 1923. (Samml. Götschen Bd. 529.) Geb. 1.50

Der erste Teil beschränkt sich auf die Darstellung der Bewegungserscheinungen und der Größenverhältnisse der Planeten und ihrer Trabanten. Im zweiten Teil leitet die zunächst gegebene Behandlung der dem Sonnensysteme weniger innig verbundenen Glieder, der Kometen und Meteore, zu den Hauptgegenständen der Betrachtung, dem Fixsternsystem, über. Im letzten Kapitel wird der Leser mit den Theorien über die Entwicklungsvorgänge im Universum bekanntgemacht.

Nautik. Kurzer Abriß des täglich an Bord von Handelsschiffen angewandten Teils der Schifffahrtskunde. Von Dr. FRANZ SCHULZE †, Direktor der Navigationschule zu Lübeck. Vierte, umgearbeitete Auflage, bearbeitet von Dr. HEINRICH KÜHL, Seefahrtsoberlehrer zu Altona. Mit 56 Abbildungen. 135 Seiten. 1926. (Samml. Götschen Bd. 84.) Geb. 1.50

Der Band will dem gebildeten Laien einen Überblick über die auf Handelsschiffen benutzten Hilfsmittel und Methoden zur Wegfindung über See geben, wird aber wegen der darin angeführten astronomischen Beispiele auch mit Vorteil zur Aufgabenstellung an höheren Schulen benutzt werden können.

Astrophysik. Die Beschaffenheit der Himmelskörper. Von Professor Dr. W. F. WISLICENUS. Neubearbeitet von Professor Dr. H. LUDENDORFF. Mit 14 Abbildungen. Vierte Auflage. 136 Seiten. 1920. (Samml. Götschen Bd. 91.) Geb. 1.50

In dem Band werden Sonne, Mond, Planeten und ihre Trabanten behandelt. Die Physik der Fixsterne, der veränderlichen Sterne, Nebel und Sternhaufen ist vollständig neubearbeitet. Neben den reinen Beobachtungstatsachen werden auch die Hypothesen über die Energiequellen der Sonne, die Entstehung der Mondgebirge usw. besprochen.

Astronomische Geographie. Von Dr. SIEGMUND GÜNTHER, Professor an der Technischen Hochschule in München. Mit 52 Abbildungen. Neudruck. 170 Seiten. 1919. (Samml. Götschen Bd. 92.) Geb. 1.50

Die bekannten Aufgaben der mathematischen Erd- und Himmelskunde, wie z. B. Orts- und Zeitbestimmungen, Erdvermessung usw., werden unter weitgehender Berücksichtigung der geschichtlichen Entwicklung besprochen. Außerdem wird die Stellung unserer Erde im Planetensystem, Entfernung, Größe und Bewegung der Planeten behandelt.

Astronomischer Jahresbericht. Gegründet von WALTER F. WISLICENUS. Mit Unterstützung der Astronomischen Gesellschaft herausgegeben von dem Rechen-Institut zu Berlin. Bisher erschienen 29 Bände, enthaltend die Literatur der Jahre 1899 bis 1927. Preise der Bände I bis XXVIII auf Anfrage. XXIX. Band: Die Literatur des Jahres 1927. XXV, 270 Seiten. 1928. 25.—

Der Bericht enthält eine Jahresübersicht über die Veröffentlichungen aus dem Gebiete der Astronomie und der Nachbargebiete. Interessenten sind Astronomen, Mathematiker, Geometer, Trigonometer, Physiker, Meteorologen und die in der Optik und Instrumententechnik Tätigen.

